Zur Theorie der übergeschlossenen Gelenksysteme.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen philosophischen Fakultät

der

Universität Rostock

vorgelegt von

Kurt Bleicher

aus **Dresden.**

Weida i. Th.
Druck von Thomas & Hubert
Spezialdruckerei für Dissertationen
1910.

Von der philosophischen Fakultät der Universität Rostock genehmigt am 8. Juni 1910.

Referent: Prof. Dr. Staude, Kaiserl. Russ. Staatsrat a. D.

Inhalt.

Einleitung. Seite

§ 1. Aufgabe vorliegender Untersuchung: Lösung dreier Probleme 1

§ 2. Die in Betracht kommenden Mechanismen 3

§ 3. Die Parameterdarstellung der Winkel eines ebenen Gelenkviereckes durch ellipt. Funktionen und Entwicklung gewisser Funktionen in unendl. Reihen 4

I. Teil.

§ 4. Untersuchung des ersten Problems und seine Zurückführung auf gewisse Gleichungssysteme 9

§ 5. Fortsetzung. Unterscheidung von acht Fällen 15

§§ 6—11. Untersuchung der acht Fälle 18

II. Teil.

§ 12. Untersuchung des zweiten Problems 46

§ 13. Erledigung der Fälle, wo e_{-1} gleich Null ist 48

§§ 14—16. Untersuchung der übrigen vier Fälle 49

§ 17. Zusammenfassung der bis jetzt gefundenen wichtigsten Resultate 57

III. Teil.

§ 18. Untersuchung des dritten Problems 59

§§ 19—24. Untersuchung der einzelnen Fälle 61

§ 25. Schlußbetrachtungen 74

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41551520_0051

Einleitung.

§ 1.

Aufgabe vorliegender Untersuchung: Lösung dreier Probleme.

Im 59. Bande der Berichte der math.-phys. Klasse der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig gibt Krause eine neue Methode an, um eine Reihe von übergeschlossenen Gelenkmechanismen herzuleiten, die vor ihm besonders Kempe,[1] Darboux,[2] Fontené[3] behandelt haben. Genau so wie Darboux führt auch er das Problem auf die Auflösung eines gewissen Gleichungssystems zurück. Doch während jener die weitere Behandlung auf die Theorie der Kurven 3. O. stützt, benutzt Krause eine Parameterdarstellung der Winkel eines ebenen Gelenkviereckes durch elliptische Funktionen, die gleichfalls von Darboux[1] in der unten erwähnten Zeitschrift zuerst gegeben ist und von Krause in einer neuen Weise abgeleitet wird. Auf beiden Wegen ist es nun möglich, das Problem vollständig zu lösen. Während Darboux die sämtlichen Arten der möglichen Mechanismen angibt, begnügt sich Krause, einen einzigen Fall herzuleiten. In einer weiteren Arbeit[4] hat dann Krause ein aus dem allgemeinen Gelenksystem folgendes spezielleres behandelt und dessen Theorie besonders, ohne Rücksicht auf die frühere Arbeit, vollständig durchgeführt. Letzteres System ist vorher

---

[1] Proceedings of London Math. Society IX (1878), S. 133.

[2] Bulletin des Sciences Mathamatiques 2. sér. III (1879), S. 151.

[3] Nouvelles Annales 4. sér. 3, S. 529 u. 4. sér. 4 (1904), S. 8.

[4] Sächs. Sitzungsberichte, Bd. 60 (1908), S. 132.

von Burmester[1] untersucht worden, und zwar ist es hauptsächlich ein Fall, dem er seine Aufmerksamkeit zuwendet und den er mit dem Namen „Brennpunktsmechanismus“ belegt. Hiernach ist die Arbeit Bolduans[2] zu erwähnen; dieser geht von dem sogenannten Wattschen Mechanismus aus und konstruiert auf Grund eines einfachen Verfahrens übergeschlossene Mechanismen. Indem er das Verfahren mehrmals anwendet, kommt er zu denselben Mechanismen, die Kempe, Darboux und andere vor ihm behandelt haben. Endlich ist noch die Arbeit von Emch[3] anzuführen; dieser stellt mittelst elliptischer Funktionen die Theorie des Peaucellierschen Inversors auf und findet einige geometrische Sätze.

Aufgabe vorliegender Untersuchung ist es, zunächst im ersten Teile an die Arbeit Krauses im 59. Bande der Sächs. Sitzungsberichte anzuknüpfen und auf Grund der dort entwickelten Methode die noch fehlenden Fälle zu erledigen. Hierbei werden wir zugleich Gelegenheit haben, Einblicke in das geometrische Wesen der Mechanismen zu tun. Ferner werden wir suchen, soweit es möglich ist, aus den allgemeinen Gelenksystemen speziellere herzuleiten. Die Gesichtspunkte, nach denen wir hierbei verfahren, sollen im nächsten Paragraphen entwickelt werden.

Im zweiten Teile werden wir Mechanismen betrachten, die zwar Spezialfälle der im ersten Teile behandelten Mechanismen sind, doch für ihre Behandlung eine neue Untersuchung erfordern. Die Methode, nach der wir die einzelnen Gelenksysteme herleiten, bleibt aber dieselbe. Durch weitere Spezialisierung werden wir hierbei auf die im 60. Bande der Sächs. Sitzungsberichte von Krause untersuchten Mechanismen kommen.

Im letzten Teile soll an die schon erwähnte Arbeit Bolduans angeknüpft werden. Auf Grund der in den beiden

---

[1] Zeitschrift für Math. und Physik. Bd. 38 (1893).

[2] Zur Theorie der übergeschl. Gelenkmechanismen. Inauguraldissertation (1908).

[3] Kinem. Gelenksysteme und die durch sie erzeugten Transformationen. Solothurn (1906/07).

vorhergehenden Teilen angewandten Methode werden wir sämtliche von Bolduan aufgestellten Resultate auf neuem Wege finden.

Auf die Arbeit von Emch soll hier nicht weiter eingegangen werden; es sei nur soviel erwähnt, daß auf Grund unserer Anschauungen in einfacher Weise die Theorie des dort betrachteten Mechanismus aufgestellt werden kann.

§ 2.

Die in Betracht kommenden Mechanismen.

Bei unseren Untersuchungen gehen wir zunächst von dem mit Typus A bezeichneten Gelenksystem aus. Es besteht aus den Gelenkvierecken $MNPQ$ und $M_1N_1P_1Q_1$, welche in den Punkten A, B, C, D in bestimmter Weise miteinander gelenkig verbunden sind. Dasselbe soll allgemein untersucht werden. Dann sollen Spezialisierungen vorgenommen werden. Die erste Möglichkeit, den Typus A zu spezialisieren, besteht darin, die Anschlußpunkte A, B, C, D auf den Seiten, resp. auf den Verlängerungen der Seiten des inneren Gelenkviereckes anzunehmen. Wir erhalten dann Gelenksysteme vom Typus A_1 und A_2. Wir können auch die Anschlußpunkte auf den Seiten des äußeren Gelenkviereckes wählen und erhalten dann den Typus A_3. Die nächste weitere Spezialisierung besteht darin, die Anschlußpunkte der beiden Gelenkvierecke sowohl auf den Seiten des inneren als auch des äußeren anzunehmen. Man erhält hierdurch den Typus A_4. Die Theorie dieser Spezialfälle ergibt sich ohne weiteres aus der des allgemeinen Mechanismus. Diese Untersuchungen werden den Inhalt des ersten Teiles bilden.

Eine wichtige Spezialisierung des allgemeinen Gelenksystems besteht darin, daß man das innere Gelenkviereck in einen Punkt zusammenschrumpfen läßt. Man erhält hierdurch den Typus A_5. Die Theorie dieses Mechanismus läßt sich keineswegs streng an die des allgemeinen Systems anschließen; es ist eine neue Untersuchung nötig. Diesen Typus A_5 kann

man noch weiter spezialisieren, indem man die Anschlußpunkte auf den Seiten des äußeren Gelenkviereckes wählt; man findet hierdurch den Typus A_6. Seine Theorie ist ohne weiteres aus derjenigen des Typus A_5 zu erschließen. Die Betrachtung der Typen A_5 und A_6 bildet den Inhalt des zweiten Teiles.

Im dritten Teile endlich werden wir ein Gelenksystem, Typus C, behandeln, das aus dem Wattschen Mechanismus, Typus B, folgt, indem wir ein neues Verbindungsstück einfügen. Der Typus B entsteht, wenn wir an zwei benachbarten Seiten eines ebenen Gelenkviereckes ein zweigliedriges Gelenk anschließen. Verbindet man nun noch das eine Glied des Gelenkes mit einer weiteren Seite, so erhält man den Typus C.

§ 3.

Die Parameterdarstellung der Winkel eines ebenen Gelenkviereckes durch ellipt. Funktionen und Entwicklung gewisser Funktionen in unendl. Reihen.

Auf eine Herleitung dieser Beziehungen kann ich wohl verzichten, da diese von Darboux, Krause, Bolduan genügend durchgeführt ist und ich mich vollständig an die von Krause gegebene Darstellung halte. Es genügt, wenn ich die Resultate angebe.

Wenn die Seiten eines Gelenkviereckes a, b, c und d und die Winkel, die die drei Seiten a, b, c mit der Seite d bilden, ω_1, ω_2, ω_3 sind, so gilt nach Krause, 59. Band der Sächs. Sitzungsberichte, S. 320:

$$\cos\omega_\varepsilon = \frac{sn^2\Theta_\varepsilon\, dn^2\mu_\varepsilon - cn^2\Theta_\varepsilon}{N}$$

$$\sin\omega_\varepsilon = \frac{2sn\Theta_\varepsilon\, cn\Theta_\varepsilon\, dn\mu_\varepsilon}{N}$$

wo

$$N = 1 - \varkappa^2 sn^2\Theta_\varepsilon\, sn^2\mu \qquad (\varepsilon = 1, 2, 3).$$

Hierin bedeuten die Größen μ_ε Konstanten, deren elliptische Funktionen sich leicht angeben lassen; dabei besteht stets

$$\mu + \mu_2 + \mu_3 = 0.$$

Die Größe $\varkappa^2$ ist das Quadrat des Moduls der elliptischen Funktionen und ist gleichfalls angebbar. Endlich stellen die Größen Θ_ε Parameter vor; doch sie sind nicht unabhängig voneinander, es besteht zwischen ihnen die Beziehung:

$$\Theta_1 - \Theta_2 = \mu_3, \quad \Theta_2 - \Theta_3 = \mu_1, \quad \Theta_3 - \Theta_1 = \mu_2.$$

Hieraus erkennt man, daß nur eine Größe völlig willkürlich ist, und wir wollen im folgenden stets Θ_1 als veränderliche Größe wählen. Die angegebenen Formeln lassen sich noch etwas umformen, wenn wir an Stelle Θ_ε

$$\Theta_\varepsilon + iK'$$

setzen; dann erhalten wir die Beziehungen:

$$\cos \omega_\varepsilon = \frac{dn^2 \Theta_\varepsilon + dn^2 \mu_\varepsilon}{\varkappa^2 N_1}$$

$$\sin \omega_\varepsilon = -\frac{2i\, dn\, \Theta_2\, dn\, \mu_\varepsilon}{\varkappa^2 N_1}$$

wo

$$N_1 = sn^2 \Theta_\varepsilon - sn^2 \mu_\varepsilon$$

und

$$\varepsilon = 1, 2, 3$$

bedeutet.

Für die weiteren Untersuchungen ist es praktisch, an Stelle des Sinus und des Cosinus die folgenden Kombinationen zu bestimmen:

$$t_\varepsilon = e^{i\omega_\varepsilon} = \cos w_\varepsilon + i \sin w_\varepsilon$$

$$t_\varepsilon^{-1} = e^{-i\omega_\varepsilon} = \cos w_\varepsilon - i \sin w_\varepsilon.$$

Dann erhalten wir:

$$t_\varepsilon = \frac{(dn\, \Theta_\varepsilon + dn\, \mu_\varepsilon)^2}{\varkappa^2 N_1}$$

$$t_\varepsilon^{-1} = \frac{(dn\, \Theta_\varepsilon - dn\, \mu_\varepsilon)^2}{\varkappa^2 N_1}$$

Da wir bei den späteren Untersuchungen die Reihenentwicklungen um die Unendlichkeitspunkte dieser Funktionen gebrauchen, so wollen wir diese, soweit sie nötig sind, gleich hier angeben. Die Funktion t_ε wird unendlich, wenn

$$\Theta_\varepsilon = \pm \mu_\varepsilon.$$

Hierbei wird der Nenner Null, während der Zähler endlich bleibt. Die Funktion t_ε^{-1} wird unendlich, wenn

$$\Theta_\varepsilon = \pm \mu_\varepsilon + 2iK'.$$

Sehen wir Θ_1 als Parameter an, so entsprechen den Werten

$$\Theta_2 = \mu_2, \quad \Theta_2 = -\mu_2; \quad \Theta_3 = \mu_3, \quad \Theta_3 = -\mu_3,$$

resp. die Werte

$$\Theta_1 = -\mu_1, \quad \Theta_1 = \mu_3 - \mu_2; \quad \Theta_1 = \mu_3 - \mu_2, \quad \Theta_1 = \mu.$$

Hieraus folgt, daß die Funktionen

$$t_\varepsilon, \; t_\varepsilon^{-1}$$

je zwei der Werte

$$\mu_1, -\mu_1, \; \mu_3 - \mu_2, \; \mu_1 + 2iK', -\mu_1 + 2iK', \; \mu_3 - \mu_2 + 2iK'$$

als Unendlichkeitspunkte besitzen, aufgefaßt als Funktionen von Θ_1. Im folgenden brauchen wir nur die Entwicklungen um die drei Punkte

$$\mu_1, \; -\mu_1, \; \mu_3 - \mu_2 = \mu_4.$$

Dieses liegt an der besonderen Art der Gleichungen, auf die uns das Problem führt. Dann erhalten wir nachstehende Entwicklungen:

1. um $\Theta_1 = \mu_1$:

$$t_1 = \frac{\sqrt{q}}{2ad} \frac{1}{\Theta_1 - \mu_1} - \frac{1}{2ad}(a^2 - b^2 - c^2 + d^2) + \cdots\cdots$$

$$t_1^{-1} = \frac{2ad}{\sqrt{q}}(\Theta_1 - \mu_1) + \cdots\cdots$$

$$t_2 = -\frac{b}{d} + \frac{2}{\sqrt{q}} \frac{b}{d}(a^2 - c^2)(\Theta_1 - \mu_1) + \cdots\cdots$$

$$t_2^{-1} = -\frac{d}{b} - \frac{2}{\sqrt{q}} \frac{d}{b}(a^2 - c^2)(\Theta_1 - \mu_1) + \cdots\cdots$$

$$t_3 = -\frac{\sqrt{q}}{2cd} \frac{1}{\Theta_1 - \mu_1} + \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2ad} + \cdots\cdots$$

$$t_3^{-1} = -\frac{2cd}{\sqrt{q}}(\Theta_1 - \mu_1) + \cdots\cdots$$

2. um $\Theta_1 = -\mu_1$:

$$t_1 = -\frac{\sqrt{q}}{2ad}\,\frac{1}{\Theta_1+\mu_1} - \frac{1}{2ad}(a^2-b^2-c^2+d^2) + \cdots\cdots$$

$$t_1^{-1} = -\frac{2ad}{\sqrt{q}}(\Theta_1+\mu_1) + \cdots\cdots$$

$$t_2 = \frac{\sqrt{q}}{2ad}\,\frac{1}{\Theta_1+\mu_1} - \frac{b^2+d^2-c^2-a^2}{2bd} + \cdots\cdots$$

$$t_2^{-1} = \frac{2bd}{\sqrt{q}}\cdot(\Theta_1+\mu_1) + \cdots\cdots$$

$$t_3 = -\frac{c}{d} - \frac{2}{\sqrt{q}}\,\frac{c}{d}(a^2-b^2)(\Theta_1+\mu_1) + \cdots\cdots$$

$$t_3^{-1} = -\frac{d}{c} + \frac{2}{\sqrt{q}}\,\frac{d}{c}(a^2-b^2)(\Theta_1+\mu_1) + \cdots\cdots$$

3. um $\Theta_1 = \mu_3 - \mu_2 = \mu_4$:

$$t_1 = -\frac{a}{d} + \frac{2}{\sqrt{q}}\,\frac{a}{d}(c^2-b^2)(\Theta_1-\mu_4) + \cdots\cdots$$

$$t_1^{-1} = -\frac{d}{a} - \frac{2}{\sqrt{q}}\,\frac{d}{a}(c^2-b^2)(\Theta_1-\mu_4) + \cdots\cdots$$

$$t_2 = -\frac{\sqrt{q}}{2bd}\cdot\frac{1}{\Theta_1-\mu_4} - \frac{1}{2bd}(b^2+d^2-c^2-a^2) + \cdots\cdots$$

$$t_2^{-1} = -\frac{2bd}{\sqrt{q}}(\Theta_1-\mu_4) + \cdots\cdots$$

$$t_3 = \frac{\sqrt{q}}{2cd}\,\frac{1}{\Theta_1-\mu_4} + \frac{1}{2cd}(a^2+b^2-c^2-d^2) + \cdots\cdots$$

$$t_3^{-1} = \frac{2cd}{\sqrt{q}}(\Theta_1-\mu_4) + \cdots\cdots$$

In diesen Ausdrücken ist gesetzt:

$$\sqrt{q} = \sqrt{q_1\ q_2\ q_3\ q_4}$$

und dabei ist

$$q_1 = -a+b+c+d, \qquad q_2 = a-b+c+d$$
$$q_3 = a+b-c+d, \quad q_4 = a+b+c-d.$$

Die Entwicklungen von t_ε^{-1} um $\Theta_1 = \mu_1 + 2iK'$, $-\mu_1 + 2iK'$, $\mu_4 + 2iK'$ lauten genau so, wie die von t_ε um $\Theta_1 = \mu_1$, $-\mu_1$, μ_4 und umgekehrt.

Im Anschluß hieran mögen noch die beiden Lionvilleschen Sätze erwähnt werden, welche für unsere weiteren Untersuchungen von großer Bedeutung sein werden; sie lauten:

1. Satz: Eine doppelt periodische Funktion, die in keinem Punkte des Periodenparallelogramms unstetig wird, ist eine Konstante.

2. Satz: Die Summe der Residuen, die zu den im Innern des Periodenparallelogramms liegenden Unstetigkeitspunkten gehören, ist gleich Null.

I. Teil.

§ 4.

Untersuchung des ersten Problems und seine Zurückführung auf gewisse Gleichungssysteme.

Nachdem wir alles zusammengestellt haben, was wir im folgenden brauchen, können wir nun an die eigentliche Aufgabe gehen.

Als Ausgangspunkt haben wir das Gelenksystem zu wählen, das mit Typus A bezeichnet ist. $MNPQ$ und $M_1N_1P_1Q_1$ sind die beiden Gelenkvierecke. Die Seiten des äußeren Gelenkviereckes sind a, b, c und d; die Winkel, die diese gegen eine feste Gerade bilden, $\omega_1', \omega_2', \omega_3', \omega_4'$. Hierzu definieren wir Größen

$$e^{i\omega_1}, \quad e^{i\omega_2}, \quad e^{i\omega_3}, \quad e^{i\omega_4}$$

und bezeichnen diese mit

$$t_1', \quad t_2', \quad t_3', \quad t_4'.$$

Die Seiten des inneren Gelenkviereckes sind a_1, b_1, c_1, d_1 und entsprechend lauten die Winkel gegen dieselbe feste Gerade

$$\psi_1', \quad \psi_2', \quad \psi_3', \quad \psi_4',$$

und die analogen Größen

$$e^{\psi i_1'}, \quad e^{i\psi_2'}, \quad e^{i\psi_3'}, \quad e^{i\psi_4'}$$

werden bezeichnet mit

$$u_1', \quad u_2', \quad u_3', \quad u_4'.$$

Im allgemeinen wird dieses Gebilde starr sein, es lautet nun die Aufgabe:

Es sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen zu suchen, daß das System ein bewegliches ist.

Um die Beziehungen aufzustellen, die zwischen den beiden Gelenkvierecken bestehen müssen, benützen wir die gleiche Darstellung der Seiten, wie sie Darboux anwendet. Indem dieser jede Größe als gerichtete Größe auffaßt, findet er eine Form, die an die Darstellung von komplexen Größen erinnert. Denken wir uns ein Dreieck ABC vorgelegt, dessen eine Seite AB die Länge a hat und mit einer festen Seite den Winkel ω bildet, so setzt Darboux:

$$AB = a e^{i\omega},\quad AC = a a' e^{i\omega},\quad CB = a(1-a') e^{i\omega}$$

wo bedeutet:

$$a' = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} e^{i \measuredangle CAB},\quad 1-a' = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} e^{i \measuredangle CBA}.$$

Dabei hat der Winkel $\overset{\frown}{CBA}$ einen Richtungssinn, der dem von $\overset{\frown}{CAB}$ entgegengesetzt ist. Den Inhalt des Dreieckes kann man auch leicht angeben, er ist

$$J = \frac{i}{4} a^2 (a' - a').$$

Die Größe a' bedeutet die zu a' konj. kompl. Größe, also:

$$a' = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} e^{-i \measuredangle CAB}.$$

Darboux gibt irrtümlicherweise hierfür folgenden Wert an:

$$J = \frac{i}{2} a^2 (a' - a').$$

Beachten wir diese Darstellung, so lassen sich folgende Beziehungen ohne weiteres hinschreiben; für das äußere Gelenkviereck gilt:

$$\text{I.} \begin{cases} a t_1' + b t_2' + c t_3' + d t_4' = 0 \\ \dfrac{a}{t_1'} + \dfrac{b}{t_2'} + \dfrac{c}{t_3'} + \dfrac{d}{t_4'} = 0 \end{cases}$$

für das innere Gelenkviereck gilt:

$$\text{II.}\quad \begin{cases} a_1 u_1' + b_1 u_2' + e_1 u_3' + d_1 u_4' = 0 \\ \dfrac{a_1}{u_1'} + \dfrac{b_1}{u_2'} + \dfrac{c_1}{u_3'} + \dfrac{d_1}{u_4'} + = 0 \end{cases}$$

Um die übrigen hinreichenden und notwendigen Bedingungen aufzustellen, führen wir in Übereinstimmung mit Darboux die folgenden Beziehungen ein, wir setzen:

$$\begin{aligned} MA &= a a' t_1', & NB &= b b' t_2' \\ AN &= a(1-a') t_1', & BP &= b(1-b') t_2' \\ M_1 A &= a_1 a_1' u_1', & N_1 B &= b_1 b_1' u_2' \\ AN_1 &= a_1(1-a_1') u_1', & BP_1 &= b_1(1-b_1') u_2' \\ PC &= c c' t_3', & QD &= d d' t_4' \\ CQ &= c(1-c') t_3', & DM &= d(1-d') t_4' \\ P_1 C &= c_1 c_3' u_3', & Q_1 D &= d_1 d_1' u_4' \\ CQ_1 &= c(1-c_1') u_3', & DM_1 &= d_1(1-d_1') u_4. \end{aligned}$$

Dann müssen die Projektionen der vier Gelenkvierecke MAN_1D, NAN_1B, PBP_1C, und QC_1Q_1D auf eine beliebige Gerade und auf eine dazu senkrechte Gerade Null sein. Dies ergibt, wenn wir die Seiten in der von Darboux angegebenen Form ausdrücken, folgende acht Gleichungen:

$$\text{III.}\quad \begin{cases} a(1-a') t_1' + b b' t_2' = a_1(1-a_1') u_1' + b_1 b_1' u_2' = AB \\ b(1-b') t_2' + c c' t_3' = b_1(1-b_1') u_2' + c_1 c_1' u_3' = BC \\ c(1-c') t_3' + d d' t_4' = c_1(1-c_1') u_3' + d_1 d_1' u_4 = CD \\ d(1-d') t_4' + a a' t_1' = d_1(1-d_1') u_4 + a_1 a_1' u_1' = DA. \end{cases}$$

Die zu a', b', c', d' und a_1, b_1, c_1, d_1 konj. kompl. Größen wollen wir mit den entsprechenden griechischen Buchstaben bezeichnen; also lauten die weiteren vier Gleichungen:

$$\text{IV.}\quad \begin{cases} a(1-\alpha') \dfrac{1}{t_1'} + b \dfrac{\beta'}{t_2'} = a_1(1-\alpha_1') \dfrac{1}{u_1'} + b_1 \beta_1' \dfrac{1}{u_2'} \\ b(1-\beta') \dfrac{1}{t_2'} + c \dfrac{\gamma'}{t_3'} = b_1(1-\beta_1') \dfrac{1}{u_2'} + c_1 \gamma_1' \dfrac{1}{u_3'} \\ c(1-\gamma') \dfrac{1}{t_3'} + d \dfrac{\delta'}{t_4'} = c_1(1-\gamma_1') \dfrac{1}{u_3'} + d_1 \delta_1' \dfrac{1}{u_4'} \\ d(1-\delta') \dfrac{1}{t_4'} + a \dfrac{\alpha'}{t_1'} = d_1(1-\delta_1') \dfrac{1}{u_4'} + a \alpha_1' \dfrac{1}{u_1'}. \end{cases}$$

Von diesen acht Gleichungen sind nur sechs unabhängig, denn in jedem der Systeme III und IV ist die vierte Gleichung eine Folge der in I und II gefundenen Beziehungen. Es bleiben somit 10 Gleichungen übrig, denen Genüge geleistet werden muß, und wir müssen nun die hinreichenden und notwendigen Bedingungen dafür aufstellen, daß die Gleichungen, etwa bei festem MN, für unendlich viele Lagen des Systems zusammenbestehen können.

Diese Gleichungen gibt auch Darboux an, doch von nun an trennen sich beide Methoden.

An Stelle der Größen $t_1', t_2', t_3', t_4', u_1', u_2', u_3', u_4'$, wollen wir die Größen:

$$t_1 = \frac{t_1'}{t_4'},\quad t_2 = \frac{t_2'}{t_4'},\quad t_3 = \frac{t_3'}{t_4'},$$

$$u_1 = \frac{u_1'}{u_4'},\quad u_2 = \frac{u_2'}{u_4'},\quad u_3 = \frac{u_3'}{u_4'},\quad x = \frac{t_4'}{u_4'},$$

einführen, sodaß dann die Gleichungen I und II die Form annehmen:

$$\text{V.}\quad \begin{cases} a t_1 + b t_2 + c t_3 + d = 0 \\ \frac{a}{t_1} + \frac{b}{t_2} + \frac{c}{t_3} + d = 0 \end{cases}$$

$$\text{VI.}\quad \begin{cases} a_1 u_1 + b_1 u_2 + c_1 u_3 + d_1 = 0 \\ \frac{a_1}{u_1} + \frac{b_1}{u_2} + \frac{c_1}{u_3} + d_1 = 0. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen III und IV lassen sich leicht folgende herleiten:

$$\text{VII.}\quad \begin{cases} a_1 a_1' u_1 = -d_1(1-d_1') + x T_1 \\ a_1 a_1' \frac{1}{u_1} = -d_1(1-\delta_1') + \frac{1}{x}\mathfrak{T}_1 \\ b_1(1-b_1')u_2 = d_1 \frac{c_1' d_1'}{1-c_1'} + x T_2 \\ b_1(1-\beta_1')\frac{1}{u_2} = d_1 \frac{\gamma_1'\delta_1'}{1-\gamma_1'} + \frac{1}{x}\mathfrak{T}_2 \\ c_1(1-c_1')u_3 = -d_1 d_1' + x T_3 \\ c_1(1-\gamma_1')\frac{1}{u_3} = -d_1\delta_1' + \frac{1}{x}\mathfrak{T}_3 \end{cases}$$

wo

$$T_1 = a a' t_1 + d(1-d')$$
$$T_2 = b(1-b')t_2 + c t_3\left(c' - \frac{c_1'}{1-c_1'}(1-c')\right) - \frac{c_1'}{1-c_1'} d d'$$
$$T_3 = c(1-c')t_3 + d d'$$

und $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_3$ die hierzu konj. kompl. Größen sind. Zu diesen Ausdrücken habe ich zu bemerken, daß in der Arbeit von Krause die Größe t_2 stets durch t_1 und t_3 ersetzt ist. Ich tue dieses nicht, da die weitere Durchführung nicht komplizierter wird und ich ferner in der Lage bin, Betrachtungen anzustellen, die im anderen Falle sich nur schwer durchführen lassen.

Setzen wir nun die im Gleichungssystem VII angegebenen Werte für u_1, u_2, u_3 in das Gleichungssystem VI ein:

$$\text{VI.} \quad \begin{cases} a_1 u_1 + b_1 u_2 + c_1 u_3 + d_1 = 0 \\ \frac{a_1}{u_1} + \frac{b_1}{u_2} + \frac{c_1}{u_3} + d_1 = 0 \end{cases}$$

so erhalten wir die Gleichungen:

$$\text{VIII.} \quad \begin{cases} \text{a)} \; x(A' a t_1 + b B' t_2 + c C' t_3 + d D') \\ \qquad + d_1(-(1-a_1')(1-b_1')(1-c_1')(1-d_1') + a_1' b_1' c_1' d_1') = 0 \\ \text{b)} \; \frac{1}{x}\left(a \mathfrak{A}' \frac{1}{t_1} + b \mathfrak{B}' \frac{1}{t_2} + c \mathfrak{C}' \frac{1}{t_3} + d \mathfrak{D}'\right) \\ \qquad + d_1(-(1-\alpha_1')(1-\beta_1')(1-\gamma_1')(1-\delta_1') + \alpha_1' \beta_1' \gamma_1' \delta_1') = 0 \end{cases}$$

wobei wir gesetzt haben:

$$A' = (a-a_1')(1-b_1')(1-c_1')$$
$$B' = a_1'(b_1'-b')(1-c_1')$$
$$C' = a_1' b_1'(c'-c_1')$$
$$D' = (1-a_1')(1-b_1')(1-c_1')(1-d') - a_1' b_1' c_1' d'.$$

$\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{D}'$ sind die zu A', B', C', D' konj. kompl. Größen.

Ehe wir diese Gleichungen VIII weiter untersuchen, wollen wir drei Gleichungen herleiten, die aus dem System VII folgen,

indem wir eine Gleichung jedesmal mit der folgenden multiplizieren, also die erste mit der zweiten, usw. Wir erhalten die Gleichungen:

$$\text{IX.}\quad \begin{cases} \text{a)}\ x T_1 d_1(1-\delta_1') + \dfrac{1}{x}\mathfrak{T}_1 d_1(1-d_1') \\ \qquad = -\alpha_1^2\alpha_1'\alpha_1' + d_1'^2(1-d_1')(1-\delta_1') + T_1\mathfrak{T}_1 \\ \text{b)}\ x T_2 d_1\delta_1'\dfrac{\gamma_1'}{1-\gamma_1'} + \dfrac{1}{x}\mathfrak{T}_2 d_1 d_1'\dfrac{c_1'}{1-c_1'} \\ \qquad = b_1^2(1-b_1')(1-\beta_1') - d_1^2 d_1'\delta_1'\dfrac{c_1'}{1-c_1'}\ \dfrac{\gamma_1'}{1-\gamma_1'} - T_2\mathfrak{T}_2 \\ \text{c)}\ x T_3 d_1\delta_1' + \dfrac{1}{c}\mathfrak{T}_3 d_1 d_1' \\ \qquad = -c_1^2(1-c_1')(1-\gamma_1') + d_1^2 d_1'\delta_1' + T_3\mathfrak{T}_3. \end{cases}$$

Durch Benützung dieser Gleichungen IX können wir zunächst von den Gleichungen VII absehen, und unser Problem ist nun folgendes:

Welches sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, daß die Gleichungen V, VIII und IX, also zusammen sieben Gleichungen, mit den Unbekannten t_1, t_2, t_3, x für unendlich viele Werte derselben bestehen?

Wir betrachten zunächst die beiden Gleichungen:

$$\text{V.}\quad \begin{cases} at + bt_2 + ct_3 + d = 0 \\ \dfrac{a}{t_1} + \dfrac{b}{t_2} + \dfrac{c}{t_3} + d = 0. \end{cases}$$

Aus ihnen folgt ohne weiteres, daß die Größen t_1, t_2, t_3 sich mittelst elliptischer Funktionen eines und desselben Parameters, etwa Θ_1, darstellen lassen. Wir können also von den Darstellungen, die in § 3 angegeben wurden, Gebrauch machen, insbesondere die Entwicklungen in unendliche Reihen anwenden. Damit ist das Problem auf die Untersuchung der zwei Gleichungen ersten Grades in x, die mit VIII bezeichnet wurden, und der drei Gleichungen zweiten Grades in x, die das Gleichungssystem IX bilden, zurückgeführt.

Unsere Aufgabe besteht nun darin, die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür aufzustellen, daß die Gleichungen VIII und IX für unendlich viele Werte von Θ_1 bestehen.

§ 5.

Fortsetzung. Unterscheidung von acht verschiedenen Fällen.

Die Gleichungen VIII lassen sich folgendermaßen schreiben:

$$\text{VIII.} \quad \begin{cases} xN + M = 0 \\ \frac{1}{x}\mathfrak{N} + \mathfrak{M} = 0 \end{cases}$$

wo die Größen N, $\mathfrak{N}$, M, $\mathfrak{M}$ die früher angegebenen Werte haben. Hieraus können wir durch Elimination von x die Gleichungen ableiten:

$$M\mathfrak{M} - N\mathfrak{N} = 0.$$

Hierin treten nur noch die Größen t_1, t_2, t_3 als veränderliche auf. Diese Gleichung muß für alle Werte von t_1, t_2, t_3 erfüllt werden. Setzen wir die in § 3 angegebene Parameterdarstellung ein, so stellt die linke Seite eine doppelt periodische Funktion dar, die stets Null ist. Eine analytische Funktion, die gleich einer Konstanten ist, darf nun aber keine singuläre Stelle haben. Es müssen infolgedessen sämtliche negative Potenzen verschwinden, wenn wir die Entwicklungen von t_1, t_2, t_3 um ihre Unendlichkeitspunkte in die Gleichung einsetzen. Ferner muß auch das konstante Glied Null sein. Es kommen für uns die drei Punkte $\Theta_1 = \mu_1$, $-\mu_1$, μ_4 in Betracht; die Unendlichkeitspunkte $\mu_1 + 2iK'$, $-\mu_1 + 2iK'$, $\mu_4 + 2iK'$ spielen keine Rolle, was leicht aus der Form der Gleichung ersichtlich ist, wenn man bedenkt, daß die Entwicklung von $\frac{1}{t_\varepsilon}$ um $\mu_\varepsilon + 2iK'$ genau so lautet, wie die von t_ε um μ_ε. Wenn wir nun die Koeffizienten der niedrigsten, in diesem Falle der negativen ersten Potenz, der Null gleich setzen, so erhalten wir den Lehrsatz:

Bei jedem der in Betracht kommenden Mechanismen müssen mindestens drei der Größen A', B', C', D' und die ihnen entsprechend konj. komplexen Größen gleich sein.

Analog kann man auch den Lehrsatz ableiten, daß bei jedem der in Betracht kommenden Mechanismen mindestens drei der Größen A_1', B_1', C_1', D_1', $\mathfrak{A}_1'$, $\mathfrak{B}_1'$, $\mathfrak{C}_1'$, $\mathfrak{D}_1'$ gleich sein müssen. Die Größen A_1', B_1', C_1', D_1' gehen aus A', B', C', D' hervor, indem wir a', b', c', d' durch a_1', b_1', c_1', d_1' und umgekehrt ersetzen. Analoges gilt für die zu diesen konj. kompl. Größen $\mathfrak{A}_1'$, $\mathfrak{B}_1'$, $\mathfrak{C}_1'$, $\mathfrak{D}_1'$.

Doch diese Resultate haben keine zu große Bedeutung; im weiteren Verlaufe wird es sich zeigen, daß wir sie ganz entbehren können. Das schließt aber keineswegs ein, daß wir auch auf das Gleichungssystem VIII verzichten werden, sondern wir werden jede der zwei Gleichungen für sich betrachten. Dabei werden wir weit mehr finden, als es bei der Vereinigung der beiden Gleichungen der Fall ist. Auf die Bestimmung des Absolutgliedes können wir verzichten; die Beziehung wird zu kompliziert, als daß aus ihr Schlüsse gezogen werden könnten.

Um das Gleichungssystem IX zu behandeln, würde man zunächst an die Bildung der Resultante je zweier der Gleichungen denken. Diese drei Resultanten müßten dann identisch verschwinden. Man müßte die Entwicklungen einsetzen und die Koeffizienten der neg. Potenzen, als auch das Absolutglied gleich Null setzen. Doch die Durchführung dieses Gedankens führt auf erhebliche rechnerische Schwierigkeiten. Einfacher kommt man auf dem folgenden Wege zum Ziel. Fassen wir einmal zwei der Gleichungen ins Auge und betrachten sie als lineare Gleichungen in x und $\frac{1}{x}$, so folgt sicherlich, daß x als auch $\frac{1}{x}$ sich rational durch t_1, t_2 und t_3 darstellen lassen, daß also x und $\frac{1}{x}$ doppeltperiodische Funktionen von Θ_1 sind. Die möglichen endlichen Unendlichkeitspunkte, die alle Pole sind, können leicht angegeben werden. Für $\frac{1}{x}$ sind es entweder die Stellen, für welche der Koeffizient von $\left(\frac{1}{x}\right)^2$ gleich Null wird, — denn die Gleichungen IX können auch als

quadratische Gleichungen in $\frac{1}{x}$ aufgefaßt werden — oder aber die Unendlichkeitspunkte der anderen Koeffizienten. Als solche kommen für uns die drei Stellen in Betracht

$$\Theta_1 = \mu_1, \quad \Theta_1 = -\mu_1, \quad \Theta_1 = \mu_3 - \mu_2 = \mu_4.$$

Soweit diese Unendlichkeitsstellen der Koeffizienten sind, sind es Pole erster Ordnung. Es folgt dann unmittelbar, daß $\frac{1}{x}$ für diese Werte höchstens von der ersten Ordnung unendlich werden kann. Unter solchen Umständen sind acht und nur acht Fälle möglich. Wir können setzen:

$$\frac{1}{x} = \frac{e_{-1}}{\Theta_1 - \mu_1} + e_0 + e_1(\Theta_1 - \mu_1) + \cdots\cdots$$

$$\frac{1}{x} = \frac{f_{-1}}{\Theta_1 + \mu_1} + f_0 + f_1(\Theta_1 + \mu_1) + \cdots\cdots$$

$$\frac{1}{x} = \frac{g_{-1}}{\Theta_1 - \mu_4} + g_0 + f_1(\Theta_1 + \mu_4) + \cdots\cdots$$

Dabei sind acht und nur acht Fälle zu unterscheiden:

1. Die drei Größen e_{-1}, f_{-1}, g_{-1} sind sämtlich von Null verschieden;

2. die drei Größen e_{-1}, f_{-1}, g_{-1} sind gleich Null;

3. eine der drei Größen e_{-1}, f_{-1}, g_{-1} ist gleich Null, die beiden anderen sind von Null verschieden;

4. zwei der Größen e_{-1}, f_{-1}, g_{-1} sind gleich Null, die dritte von Null verschieden.

Hiermit haben wir im wesentlichen die Aufgabe gelöst. Wir haben in jedem der acht Fälle die Entwicklungen um die drei genannten Unendlichkeitspunkte von t_1, t_2, t_3 in die Gleichungen VIII und IX einzusetzen und die Koeffizienten der negativen ersten Potenzen und die konstanten Glieder gleich Null zu setzen. Außerdem haben wir uns noch in jedem einzelnen Falle die Frage vorzulegen, ob zu diesen Punkten noch diejenigen hinzuzutreten haben, die das Verschwinden der Koeffizienten von $\left(\frac{1}{x}\right)^2$ der Gleichungen IX bedingt. Eine gute

Hilfe zur Entscheidung dieser Frage ist der 2. Lionvillesche Satz:

Die Summe der Residuen, die zu den im Innern des Periodenparallelogramms liegenden Unstetigkeitspunkten gehören, ist gleich Null.

§ 6.

Untersuchung des Falles: $e_{-1} \neq 0$, $f_{-1} \neq 0$, $g_{-1} \neq 0$.

Setzen wir die Entwicklungen in die Gleichungen VIII ein, so bemerken wir, daß in der Gleichung VIIIa keine neg. erste Potenzen auftreten, wohl aber in der Gleichung VIIIb. Wir erhalten durch Vergleichung der Koeffizienten die Beziehungen:

$$1.\quad A' = B' = C' = D'$$

Nun betrachten wir die Gleichungen IX. Wir nehmen zunächst den Punkt $\Theta_1 = \mu_1$ und finden durch Vergleichen der Koeffizienten von $(\Theta_1 - \mu_1)^{-1}$ das Gleichungssystem:

$$e_{-1}\, d\, d_1 (1 - d_1') = \frac{a'}{2} \sqrt{q}$$

$$e_{-1}\, d\, d_1\, c_1' d_1' f = \frac{c' - c_1'}{2} \sqrt{q} \cdot f$$

$$e_{-1}\, d\, d_1\, d_1' = -\frac{1 - c'}{2} \sqrt{q}$$

wo bedeutet:

$$f = \gamma_1' \delta' + (1 - \gamma_1')(1 - \beta')$$

Aus der ersten und dritten Beziehung folgt:

$$2.\quad a' d_1' + (1 - c')(1 - d_1') = 0$$

Dann folgt aus der zweiten Beziehung

$$f = 0.$$

Dann gilt auch ohne weiteres die hierzu konj. komplexe Beziehung:

$$3.\quad d' c_1' + (1 - b')(1 - c_1') = 0.$$

Bei der Entwicklung um $\Theta_1 = -\mu_1$ erhalten wir die Beziehungen:

$$f_{-1}\, d\, d_1 (1-d_1') = -\frac{a'}{2}\sqrt{q}$$

$$f_{-1}\, d\, d_1 \frac{c_1'}{1-c_1'} = -\frac{1-b'}{2}\sqrt{q}$$

$$4.\quad d' = 1-c'.$$

Aus den beiden ersten Beziehungen läßt sich folgende herleiten:

$$5.\quad a' c_1' d_1' = (1-b')(1-c_1')(1-d_1')$$

Nun nehmen wir den Punkt $\Theta_1 = \mu_4$ und bestimmen gleichfalls die Koeffizienten der neg. ersten Potenzen. Dabei ergibt sich folgendes:

$$6.\quad a' = 1-d'$$

$$g_{-1}\, d\, d_1 d_1' \frac{c_1'}{1-c_1'} = -\frac{c'}{2}\sqrt{q}$$

$$g_{-1}\, d\, d_1 d_1' = \frac{1-c'}{2}\sqrt{q}$$

Aus den letzten beiden Beziehungen können wir nachstehende Relation gewinnen:

$$7.\quad c'(1-c_1') + c_1'(1-c') = 0.$$

Aus diesen sieben Beziehungen lassen sich folgende ohne weiteres herleiten:

$$a' = 1-b' = c' = 1-d', \quad a_1' = 1-b_1' = c_1' = 1-d_1'$$

$$a'(1-a_1') + a_1'(1-a') = 0$$

Wir können das Resultat aussprechen:

Im Falle $e_{-1} \neq 0$, $f_{-1} \neq 0$, $g_{-1} \neq 0$ müssen zunächst die Beziehungen bestehen:

$$a' = 1-b' = c' = 1-d', \quad a_1' = 1-b_1' = c_1' = 1-d',$$

$$a'(1-a_1') + a_1'(1-a_1') = 0$$

Ehe wir die konst. Glieder bei den Entwicklungen um die einzelnen Unendlichkeitspunkte vergleichen, wollen wir nachsehen, ob die Summe der Residuen Null ist. Wie man sich leicht überzeugen kann, ist dies nicht der Fall. Daraus müssen wir folgern, daß mindestens noch ein weiterer Unendlichkeits-

punkt hinzutreten muß. Hierbei kommen lediglich die Stellen in Frage, für welche die Koeffizienten von $\frac{1}{x^2}$ der Gleichungen IX verschwinden. Dann bestehen die Beziehungen:

$$\mathfrak{T}_1 = a\,\frac{\alpha'}{t_1} + d(1-\delta') = 0$$

$$\mathfrak{T}_2 = \frac{b(1-\beta')}{t_2} + \frac{c}{t_3}\left(\gamma' - \frac{\gamma_1'}{1-\gamma_1'}(1-\gamma')\right) - \frac{\gamma_1'}{1-\gamma_1'}\,d\delta' = 0$$

$$\mathfrak{T}_3 = c(1-\gamma')\,\frac{1}{t_3} + d\delta' = 0.$$

Hieraus folgt, wenn wir die bis jetzt gefundenen Beziehungen beachten:

$$t_1 = -\frac{a}{d}, \quad t_2 = \frac{b}{d}, \quad t_3 = -\frac{c}{d}.$$

Setzen wir diese Werte in

$$\frac{a}{t_1} + \frac{b}{t_2} + \frac{c}{t_3} + d = 0$$

ein, so wird diese Gleichung identisch erfüllt; tun wir das Gleiche aber mit der Beziehung

$$at_1 + bt_2 + ct_3 + d = 0,$$

so erhalten wir die neue Relation

$$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 0.$$

Hiermit haben wir eine wichtige Seitenbeziehung gefunden. Die weiteren erhalten wir, wenn wir nun die konstanten Glieder in den Entwicklungen betrachten. Die Gleichungen VIII werden durch die bis jetzt gefundenen Relationen für alle Werte von t und x identisch erfüllt. Die Gleichungen IX ergeben aber folgende Beziehungen. Entwickeln wir um $\Theta_1 = \mu_1$, so finden wir:

$$a_1^2 + c_1^2 = l^2(a^2 + c^2)$$

$$b_1^2 + d_1^2 = l^2(b^2 + d^2)$$

wo

$$l^2 = (2\alpha' - 1)(2\alpha' - 1) = \frac{a'\alpha'}{a_1'\alpha_1'}$$

Bei der Entwicklung um $\Theta_1 = -\mu_1$ ergibt sich:

$$d_1^2 - c_1^2 = l^2 (d^2 - c^2)$$
$$a_1^2 - b_1^2 = l^2 (a^2 - b^2)$$

Endlich ergibt die Entwicklung um $\Theta_1 = \mu_4$:

$$d_1^2 - a_1^2 = l^2 (d^2 - a^2)$$
$$b_1^2 - c_1^2 = l^2 (b^2 - c^2)$$

Aus diesen Beziehungen können wir nachstehende Seitenrelationen gewinnen:

$$a_1^2 = l^2 a^2, \quad b_1^2 = l^2 b^2, \quad c_1^2 = l^2 c^2, \quad d_1^2 = l^2 d^2.$$

Es bleibt nun noch übrig, die Größe x, als auch die Größen u_1, u_2, u_3 als Funktionen der Größen t darzustellen. Zu diesem Zwecke gehen wir zu den Gleichungen VII des § 4 zurück. Setzen wir in diese die bis jetzt erhaltenen Beziehungen ein, so ergeben die beiden ersten Gleichungen folgende Werte für $\frac{1}{x}$ bez. x:

$$x = \frac{la_1'}{a'} \frac{au_1 + d}{at_1 + d}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{la_1'}{a'} \frac{\frac{a}{u_1} + d}{\frac{a}{t_1} + d}$$

Diese beiden Beziehungen wollen wir miteinander multiplizieren und erhalten so eine quadratische Gleichung in u_1, deren Wurzeln sind:

$$u_1 = t_1, \quad u_1 = \frac{1}{t_1}.$$

Von diesen beiden Wurzeln ist nur eine zu gebrauchen, das Kriterium hierfür gibt das Verhalten der Größe $\frac{1}{x}$, wenn wir dort für u_1 einen der Werte einsetzen. Da zeigt es sich, daß, wenn

$$u_1 = t_1$$

die Größe $\frac{1}{x}$ gar nicht in den vorausgesetzten Punkten unendlich wird. Wohl aber tritt dies ein, wenn

$$u_1 = \frac{1}{t_1}.$$

Für x erhalten wir den Wert:

$$x = -l \frac{1 - a_1'}{1 - a'} \frac{a + dt_1}{at_1 + d} \frac{1}{t_1}.$$

In gleicher Weise läßt sich zeigen, daß nur der Wert

$$u_3 = \frac{1}{t_3}$$

zu gebrauchen ist.

Die noch fehlende Größe u_2 läßt sich rasch bestimmen, wenn wir die Beziehungen benützen

$$\begin{cases} a_1 u_1 + b_1 u_2 + c_1 u_3 + d_1 = 0 \\ \frac{a_1}{u_1} + \frac{b_1}{u_2} + \frac{c_1}{u_3} + d_1 = 0 \end{cases}$$

Diese nehmen jetzt die Form an

$$\begin{cases} \frac{a}{t_1} + b u_2 + \frac{c}{t_3} + d = 0 \\ at_1 + \frac{b}{u_2} + ct_3 + d = 0 \end{cases}$$

Hieraus folgt:

$$u_2 = \frac{1}{t_2}.$$

Wir erhalten somit als Resultat:

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für einen übergeschlossenen Mechanismus der hier betrachteten Art sind:

$$a' = 1 - b' = c' = 1 - d', \quad a_1' = 1 - b_1' = c_1' = 1 - d_1'$$

$$a'(1 - a_1') + a_1'(1 - a') = 0.$$

$$a_1^2 = l^2 a^2, \quad b_1^2 = l^2 b^2, \quad c_1^2 = l^2 c^2, \quad d_1^2 = l^2 d^2,$$

$$l^2 = \frac{a' a'}{a_1' a_1'} = (2a' - 1)(2a' - 1), \quad a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 0.$$

$$u_1 = \frac{1}{t_1}, \quad u_2 = \frac{1}{t_2}, \quad u_3 = \frac{1}{t_3}, \quad x = -\frac{1 - a_1'}{1 - a'} \cdot l \cdot \frac{a + dt_1}{at_1 + d} \frac{1}{t_1}.$$

Für x lassen sich noch andere Werte angeben, etwa:

$$x = \frac{1 - a_1'}{1 - a'} \cdot l \cdot \frac{c + dt_3}{ct_3 + d} \frac{1}{t_3}.$$

Dieser Fall ist von Krause als einziger behandelt worden und findet sich bei Darboux als der 2. Unterfall des 1. Hauptfalles.

Wie Darboux schon zeigt, ist es möglich, auf Grund der gefundenen Beziehungen Einblick in das geometrische Wesen des Mechanismus zu tun.

Die Beziehung

$$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 0$$

sagt, daß die Diagonalen des äußeren Gelenkviereckes senkrecht aufeinender stehen. Das Gleiche gilt für die Diagonalen des Gelenkviereckes. Die Beziehungen

$$a' = 1 - b' = c' = 1 - d'$$

sagen uns, daß die Dreiecke, die über den Seiten des Gelenkviereckes $MNPQ$ errichtet werden, ähnlich sind. Entsprechend gilt für die Dreiecke, die über den Seiten des Gelenkviereckes $M_1N_1P_1Q_1$ errichtet werden. Die Seiten, die das Viereck $ABCD$ bilden, unterliegen den Beziehungen:

$$AB = (1-a')(at_1' + bt_2), \qquad CD = -(1-a')(at_1' + bt_2')$$

$$BC = a'(bt_2' + ct_3), \qquad DA = -a'(bt_2' + ct_3').$$

Für die Diagonalen des äußeren Gelenkviereckes gelten die Beziehungen:

$$MP = at_1' + bt_2', \quad NQ = bt_2' + ct_3'.$$

Hieraus erkennt man, daß das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm ist, dessen Seiten proportional den Diagonalen des äußeren Gelenkviereckes sind und die mit diesen während der ganzen Bewegung konstante Winkel bilden, d. h. daß der Winkel des Parallelogramms während der ganzen Bewegung konstant ist. Ferner gilt:

$$\overline{MA}^2 = a^2a'a', \quad \overline{M_1A}^2 = a_1^2a_1a_1 = a^2a'a'.$$

Analog kann man nachweisen, daß bei den Vierecken MAM_1D, NBN_1A, PCP_1B, QDQ_1C je zwei anstoßende Seiten gleich sind. Auf Grund dieser angegebenen Beziehungen ist es nun möglich, den Mechanismus zu konstruieren (s. Fig. 1).

Hiermit ist der erste allgemeine Fall erledigt, und wir wollen nun untersuchen, welche der in § 2 angegebenen Spezialfälle möglich sind. Lassen wir die zum inneren Gelenkviereck gehörigen Dreiecke sämtlich in Gerade zusammenschrumpfen, dann müssen die in diesen vorkommenden Winkel entweder Null oder 180° werden. Jedenfalls müssen die Größen a_1', b_1', c_1', d_1' auf Grund ihrer Definition reell werden. Nach der Beziehung

$$a'(1-a_1')+a_1'(1-a')=0$$

folgt

$$\frac{a'}{1-a'}=-\frac{a_1'}{1-a_1'}.$$

Die rechte Seite ist reell, also muß es auch die linke Seite werden. Da nun aber, wie in § 4 bemerkt wurde, die Winkel an derselben Seite eines jeden Dreiecks entgegengesetzten Richtungssinn haben, so kann der Ausdruck auf der linken Seite nur reell sein, wenn die Winkel entweder beide gleich sind oder der eine gleich Null, der andere gleich 180° ist. Damit erhalten wir das Resultat:

Der Typus A_1 und A_2 existiert hier nicht, sondern nur der Typus A_4.

In analoger Weise folgt auch, daß der Typus A_3 nicht existieren kann. Für den Mechanismus, Typus A_4, gelten dieselben Beziehungen wie für den allgemeinen. Fig. 2 stellt den Fall dar, wo die beiden Dreieckswinkel Null sind, Fig. 3 denjenigen, wo der eine 180°, der andere Null ist. Bei letzterem Falle erkennen wir, daß das früher äußere Gelenkviereck jetzt inneres geworden ist, und umgekehrt; sonst interessiert uns dieser Fall weiter nicht, und wir werden uns bei den weiteren Untersuchungen immer nur auf den Fall beschränken, wo beide Dreieckswinkel Null sind.

Damit ist der Fall $e_{-1}\neq 0$, $f_{-1}\neq 0$, $g_{-1}\neq 0$ erledigt. Wir schließen diese Betrachtungen mit dem Satze ab:

Es gibt in diesem Falle einen Mechanismus vom Typus A. Durch Spezialisierung ergibt sich ein Mechanismus vom Typus A_4.

§ 7.

Betrachtung des Falles: $e_{-1} = 0,\ f_{-1} = 0,\ g_{-1} = 0.$

Betrachten wir zunächst die Gleichungen VIII, so ergibt die Vergleichung der Koeffizienten der neg. ersten Potenzen die Beziehungen:

$$1.\quad A' = B' = C'.$$

Die Gleichungen VIII nehmen dann die Form an:

$$\text{VIII.}\begin{cases} \text{a)}\quad x\,d\,(D' - A') \\ \quad + d_1\,(-(1-\alpha_1')\,(1-b_1')\,(1-c_1')\,(1-d_1') + \alpha_1' b_1' c_1' d_1') = 0 \\ \text{b)}\quad \dfrac{1}{x}\,d\,(\mathfrak{D}' - \mathfrak{A}') \\ \quad + d_1\,(-(1-\alpha_1')\,(1-\beta_1')\,(1-\gamma_1')\,(1-\delta_1') + \alpha_1'\beta_1'\gamma_1'\delta_1') = 0. \end{cases}$$

Die Gleichungen IX ergeben folgende Relationen, wenn wir die Entwicklungen um die einzelnen Unendlichkeitspunkte einsetzen und die Koeffizienten der neg. ersten Potenzen bestimmen. Bei der Entwicklung um

$\Theta_1 = \mu_1$:

$$e_0 = \frac{d_1}{d}\,\frac{1-\delta_1'}{1-\delta'}$$

$$2.\quad c' = c_1'$$

$$e_0 = \frac{d_1}{d}\,\frac{\delta_1'}{\delta'}$$

Hieraus folgt:

$$3.\quad d' = d_1'.$$

Bei der Entwicklung um $\Theta_1 = -\mu_1$ und $\Theta_1 = \mu_4$ finden wir nur die Beziehungen

$$f_0 = \frac{d_1}{d} \qquad \text{bez.} \qquad g_0 = \frac{d_1}{d}$$

Unter Beachtung der Beziehung

$$c' = c_1'$$

erkennt man, daß

$$C' = 0$$

wird. Dieses bedingt dann, daß

$$A' = 0, \qquad B' = 0.$$

Dies kann aber nur sein, wenn

$$a' = a'_1, \quad b' = b'_1.$$

Wir haben bis jetzt das Resultat gefunden:

Im Falle $e_{-1} = 0$, $f_{-1} = 0$, $g_{-1} = 0$ müssen die Relationen bestehen:

$$a' = a'_1, \qquad b' = b'_1 \qquad c' = c'_1 \qquad d' = d'_1.$$

Da in diesem Falle die Punkte

$$\Theta_1 = \mu_1, \quad \Theta_1 = -\mu_1, \quad \Theta = \mu_4$$

keine Unendlichkeitspunkte von $\frac{1}{x}$ sind, so braucht auch der Unendlichkeitspunkt der durch das Verschwinden der Koeffizienten von $\frac{1}{x^2}$ der Gleichungen IX bedingt ist, hier nicht hinzuzutreten. Daß dieser Schluß berechtigt ist, wird die spätere Berechnung von $\frac{1}{x}$ bestätigen.

Die Gleichung VIIIa nimmt unter Beachtung der bis jetzt gefundenen Resultate die Form an:

$$x d((1-a')(1-b')(1-c')(1-d') - a'b'c'd') + d_1(-(1-a')(1-b')(1-c')(1-d') + a'b'c'd') = 0.$$

Setzen wir voraus, daß

$$(1-a')(1-b')(1-c')(1-d') - a'b'c'd'$$

von Null verschieden ist, so folgt:

$$x = \frac{d_1}{d}$$

Wir werden sehen, daß unsere Voraussetzung richtig ist, indem wir später die Größe x noch auf einem anderen Wege gewinnen werden. Doch zunächst wollen wir die Beziehungen zusammenstellen, die die Bestimmung der konst. Glieder ergibt, wenn wir die Entwicklungen in die Gleichungen IX einsetzen; wir finden bei der Entwicklung

1. um $\Theta_1 = \mu_1$:

$$(b^2 - b_1^2)(1-b')(1-c') = -(d^2 - d_1^2)c'd'$$
$$(c^2 - c_1^2)(1-c')(1-d') = -(a^2 - a_1^2)a'd'$$

2. um $\Theta_1 = -\mu_1$:

$$(b^2 - b_1^2)(1 - b')(1 - c')(1 - d') = (a^2 - a_1^2)\, a'c'd'$$
$$(d^2 - d_1^2)\, d' = (c^2 - c_1^2)(1 - c')$$

3. um $\Theta_1 = \mu_4$:

$$(a^2 - a_1^2)\, a' = (d^2 - d_1^2)(1 - d')$$
$$(c^2 - c_1^2)\, c' = (b^2 - c_1^2)(1 - b')$$

Hieraus lassen sich die Seitenrelationen herleiten:

$$a_1 = a, \quad b_1 = b, \quad c_1 = c, \quad d_1 = d.$$

Nun wollen wir die Größe x und die Größen u_1, u_2, u_3 in der in § 6 durchgeführten Weise bestimmen. Man findet:

$$u_1 = t_1, \quad u_2 = t_2, \quad u_3 = t_3, \quad x = 1.$$

Wir erhalten somit folgende Beziehungen:

$$a_1' = a', \quad b_1' = b', \quad c_1' = c', \quad d_1' = d',$$
$$a_1 = a, \quad b_1 = b, \quad c_1 = c, \quad d_1 = d$$
$$u_1 = t_1, \quad u_2 = t_2, \quad u_3 = t_3, \quad x = 1.$$

Dieser Fall ist von Darboux als 1. Unterfall des 1.Hauptfalles behandelt worden. Die beiden Gelenkvierecke fallen zusammen; es ist somit der Mechanismus überhaupt kein übergeschlossener. Damit ist dieser Fall erledigt.

Resultat: Der Fall $e_{-1} = 0$, $f_{-1} = 0$, $g_{-1} = 0$ liefert keinen übergeschlossenen Mechanismus.

§ 8.

Untersuchung der Fälle: A. $e_{-1} = 0, \quad f_{-1} = 0, \quad g_{-1} \neq 0$
B. $e_{-1} = 0, \quad f_{-1} \neq 0, \quad g_{-1} = 0.$

A. Untersuchung des Falles: $e_{-1} = 0, \quad f_{-1} = 0, \quad g_{-1} \neq 0.$

Setzen wir die Entwicklungen in die Gleichungen VIII ein, so ergibt die Vergleichung der Koeffizienten der ersten neg. Potenzen die Beziehung

1. $A' = B' = C' = D'.$

Die Gleichungen IX ergeben folgende Relationen. Bei der Entwicklung um $\Theta_1 = \mu_1$ finden wir:

$$e_0 = \frac{d_1}{d}$$

$$2.\quad c_1' = c'$$

$$3.\quad d_1' = d'$$

Bei der Entwicklung um $\Theta_1 = -\mu_1$ erhalten wir nur

$$f_0 = \frac{d_1}{d}.$$

Die Entwicklung um $\Theta_1 = \mu_4$ ergibt:

$$4.\quad a' = 1 - d'$$

$$g_{-1} d\, d_1 c_1' d_1' = (1 - c_1')(1 - b')\frac{\sqrt{q}}{2}$$

$$g_{-1} d\, d_1 d_1' = (1 - c')\frac{\sqrt{q}}{2}.$$

Hieraus folgt:

$$5.\quad c' = 1 - b'.$$

Wir haben somit bis jetzt gefunden:

$$a' = 1 - d', \quad c' = 1 - b'$$

$$c_1' = c', \qquad d_1' = d', \qquad A' = B' = C' = D'.$$

Da

$$c' = c_1'$$

so wird

$$C' = 0,$$

also ist auch:

$$A' = 0, \quad B' = 0, \quad D' = 0$$

mithin gilt:

$$a_1' = a', \quad b_1' = b'.$$

Wir finden das Resultat:

Im Falle $e_{-1} = 0$, $f_{-1} = 0$, $g_{-1} \neq 0$ muß sein:

$$a' = 1 - d' \quad c' = 1 - b'$$

$$a_1' = a', \quad b_1' = b', \quad c_1' = c', \quad d_1' = d'.$$

Wie man ohne weiteres erkennt, ist in diesem Falle die Summe der Residuen nicht Null, es muß also zu dem Unendlichkeitspunkt $\Theta_1 = \mu_4$ noch der hinzutreten, der durch das Verschwinden der Koeffizienten von $\frac{1}{x^2}$ der Gleichungen IX bedingt ist. Es ist also hier wieder:

$$\mathfrak{T}_1 = 0, \quad \mathfrak{T}_2 = 0, \quad \mathfrak{T}_3 = 0.$$

Hieraus erhalten wir die Werte:

$$\frac{1}{t_1} = -\frac{d}{a}$$

$$\frac{1}{t_2} = -\frac{d}{b}\,\frac{\delta'}{1-\gamma'}$$

$$\frac{1}{t_3} = -\frac{d}{c}\,\frac{\delta'}{1-\gamma'}$$

Setzen wir diese Werte in

$$a t_1 + b t_2 + c t_3 + d = 0$$

ein, so erhalten wir die Beziehung:

$$(a^2 - d^2)(1 - a') + (c^2 - b^2) b' = 0.$$

Hierzu kommt noch die konj. komplexe Beziehung:

$$(a^2 - d^2)(1 - \alpha') + (c^2 - b^2)\beta' = 0.$$

Aus beiden Relationen können wir noch die weitere herleiten:

$$\frac{1 - a'}{b'} = \frac{1 - \alpha'}{\beta'}.$$

Die Gleichungen VIII werden auf Grund der bis jetzt gefundenen Resultate für alle Werte von t und x identisch erfüllt. Die Gleichungen IX ergeben folgende Relationen, wenn wir die konst. Glieder in den einzelnen Entwicklungen betrachten. Wir finden, wenn wir entwickeln:

a) um $\Theta_1 = \mu_1$:

$$(b^2 - b_1^2) b' = -(d^2 - d_1^2)(1 - a')$$

$$(c^2 - c_1^2) b' = -(a^2 - a_1^2)(1 - a')$$

b) um $\Theta_1 = -\mu_1$:

$$(b^2 - b_1^2)b' = (a^2 - a_1^2)(1 - a')$$
$$(c^2 - c_1^2)b' = (d^2 - d_1^2)(1 - a')$$

c) um $\Theta_1 = \mu_4$:

$$(c^2 - b^2)b' = (a_1^2 - d_1^2)(1 - a')$$
$$(c_1^2 - b_1^2)b' = (a^2 - d^2)(1 - a')$$

Aus diesen Seitenrelationen können wir leicht folgende herleiten:

$$a_1 = d, \quad b_1 = c, \quad c_1 = b, \quad d_1 = a.$$

Um die Größe x und die Größen u_1, u_2, u_3 zu bestimmen, gehen wir genau so wie in den früheren Fällen vor und finden:

$$u_1 = t_1, \quad u_2 = \frac{t_1}{t_3}, \quad u_3 = \frac{t_1}{t_2}, \quad x = \frac{d + \frac{a}{t_1}}{d + a t_1} t_1 = \frac{\frac{b}{t_2} + \frac{c}{t_3}}{b t_2 + c t_3} t_1.$$

Wir können folgendes Resultat aussprechen:

Wir erhalten einen übergeschlossenen Mechanismus, wenn die Beziehungen bestehen:

$$a' = 1 - d', \quad b' = 1 - c'.$$
$$a_1' = a', \quad b_1' = b', \quad c_1' = c', \quad d_1' = d', \quad \frac{1 - a'}{b'} = \frac{1 - a'}{\beta'}.$$
$$(a^2 - d^2)(1 - a') + (c^2 - b^2)b' = 0.$$
$$a_1 = d, \quad b_1 = c, \quad c_1 = b, \quad d_1 = a$$
$$u_1 = t_1, \quad u_2 = \frac{t_1}{t_3}, \quad u_3 = \frac{t_1}{t_2}, \quad x = \frac{d + \frac{a}{t_1}}{d + a t_1} t_1 = \frac{\frac{b}{t_2} + \frac{c}{t_3}}{b t_2 + c t_3} t_1.$$

Darboux hat diesen Fall als zweiten Unterfall des 2. Hauptfalles behandelt.

Hieran wollen wir einige geom. Betrachtungen über das Wesen dieses Mechanismus anschließen.

Die Beziehungen:

$$a' = 1 - d', \quad b' = 1 - c,$$

sagen uns, daß die Dreiecke MAN und MDQ ähnlich sind, ebenso die Dreiecke NBP und PCQ. Die Beziehung

$$\frac{1-\alpha'}{b'} = \frac{1-\alpha'}{\beta}$$

bedeutet, daß die Winkel bei N, die den Dreiecken MAN und NBP angehören, gleich sind. Unter Berücksichtigung des früheren folgt hieraus, daß unter den acht Winkeln, die an den Gelenkviereckssseiten liegen, nur drei von einander verschieden sind. Von diesen drei Winkeln sind nur zwei beliebig. Es muß die Beziehung bestehen:

$$(a^2-d^2)(1-\alpha')+(c^2-b^2)\,b'=0.$$

Die Deutung dieser Formel ist eine verschiedenfache. Wir wollen sie zunächst folgendermaßen schreiben:

$$a^2(1-\alpha')-b^2b'+c^2(1-c')-d^2d'=0.$$

Hierzu wollen wir die konj. kompl. Beziehung bilden:

$$a^2(1-\alpha')-b^2\beta'+c^2(1-\gamma')-d^2\delta'-0.$$

Subtrahieren wir beide Formeln von einander, so erhalten wir die Relation:

$$a^2(\alpha'-a')+b^2(\beta'-b)+c^2(\gamma'-c')+d^2(\delta'-d')=0.$$

Nach § 4 war der Inhalt eines über der Seite a errichteten Dreieckes

$$J=\frac{i}{4}a^2(\alpha'-a').$$

Mithin können wir die gefundene Beziehung folgendermaßen deuten: Die Summe der Inhalte der vier Dreiecke, die zum äußeren Gelenkviereck gehören, ist Null. Letztere Relation hat nur einen Sinn, wenn wir dem Inhalte jedes Dreieckes ein Vorzeichen beifügen, das positive, wenn wir das Dreieck im Uhrzeigersinn umfahren, das negative, wenn es im entgegengesetzten Sinne geschieht. Eine andere Deutung der Formel

$$(a^2-d^2)(1-\alpha')+(c^2-b^2)b'=0$$

ist folgende. Wir schreiben zunächst:

$$\frac{a^2-d^2}{b^2-c^2} = \frac{b'}{1-a'}.$$

Nach § 4 können wir hierfür schreiben:

$$\frac{(a+d)(a+d)}{(b+c)(b-c)} = \frac{NB \cdot a}{b \cdot NA}.$$

Diese Formel ermöglicht uns, wenn a, b, c, d und NA gegeben ist, in leichter Weise NB zu berechnen und zu konstruieren. Es lassen sich noch eine Reihe weiterer Beziehungen angeben: Die Seiten AD und BC stehen in konst. Beziehung mit den Diagonalen QN und MP. Es ist ferner:

$$AB = CD$$

gleichfalls gilt:

$$\begin{aligned}
\overline{M_1A^2} &= a_1^2 a_1' d_1' && = d^2(1-d')(1-\delta') = \overline{MD^2} \\
\overline{M_1D^2} &= d_1^2(1-d_1')(1-\delta_1') && = a^2 a' \alpha' && = \overline{MA^2} \\
\overline{N_1A^2} &= a_1^2(1-a_1')(1-\alpha_1') && = d^2 d' \delta' && = \overline{QD^2} \\
\overline{N_1B^2} &= b_1^2 b_1' \beta_1' && = c^2(1-c')(1-\gamma') = \overline{QC^2} \\
\overline{P_1B^2} &= b_1^2(1-b_1')(1-\beta_1') && = c^2 c' \gamma' && = \overline{PC^2} \\
\overline{P_1C^2} &= c_1^2 c_1' \gamma_1' && = b^2(1-b')(1-\beta') = \overline{PB^2} \\
\overline{Q_1C^2} &= c_1^2(1-c_1')(1-\gamma_1') && = b^2 b' \beta' && = \overline{NB^2} \\
\overline{Q_1D^2} &= d_1^2 d_1' \delta_1' && = a^2(1-a')(1-\alpha') = \overline{NA^2}.
\end{aligned}$$

Unter Beachtung dieser Beziehungen sind wir imstande, den Mechanismus zu konstruieren (s. Fig. 4).

Als einzige Spezialisation ist nur der Fall möglich, daß sowohl die äußeren als auch die inneren Dreiecke in Gerade zusammenschrumpfen. Dies ergibt sich aus den Beziehungen:

$$a_1' = a', \; b_1' = b', \quad c_1' = c', \; d_1' = d'.$$

Die Konstruktion dieses speziellen Mechanismus hat nach denselben Gesichtspunkten wie die des allgemeinen zu erfolgen (s. Fig. 5).

Wir können das Resultat aussprechen:

Im Falle $e_{-1} = 0$, $f_{-1} = 0$, $g_{-1} \neq 0$ gibt es einen Mechanismus vom Typus A. Durch Spezialisierung findet man einen vom Typus A_4.

B. Mit diesem Falle steht im engen Zusammenhange der Fall: $e_{-1} = 0$, $f_{-1} \neq 0$, $g_{-1} = 0$. Er bildet die notwendige

Ergänzung zu jenem. Wir können uns infolgedessen darauf beschränken, einfach die Resultate anzugeben:

Im Falle $e_{-1} = 0$, $f_{-1} \neq 0$, $g_{-1} = 0$ gibt es einen übergeschlossenen Mechanismus, wenn die Relationen bestehen:

$$a' = 1 - b', \quad a_1' = a', \quad c_1' = c, \quad \frac{a'}{1-d'} = \frac{a'}{1-d'}.$$
$$c' = 1 - d', \quad b_1' = b', \quad d_1' = d',$$

$$(a^2 - b^2)\, a' + (c^2 - d^2)\, c' = 0.$$

$$a_1 = b, \quad b_1 = a, \quad c_1 = d, \quad d_1 = c.$$

$$u_1 = \frac{t_2}{t_1}, \quad u_2 = \frac{t_3}{t_1}, \quad u_3 = t_3, \quad x = \frac{\frac{a}{t_1} + \frac{b}{t_2}}{a t_1 + b t_2}\, t_3.$$

Die Mechanismen sind in Fig. 6 und 7 dargestellt. Wir wollen diesen Paragraphen mit dem Satze beschließen:

Lehrsatz: Bei den Fällen

$$e_{-1} = 0, \quad f_{-1} = 0, \quad g_{-1} \neq 0$$
$$e_{-1} = 0, \quad f_{-1} \neq 0, \quad g_{-1} = 0$$

gibt es einen allgemeinen Mechanismus, entsprechend Typus A. Durch Spezialisierung erhält man in jedem der Fälle einen vom Typus A_4.

§ 9.

Untersuchung des Falles: $e_{-1} = 0$, $f_{-1} \neq 0$, $g_{-1} \neq 0$.

Setzen wir die Entwicklungen in die Gleichungen VIII ein, so ergibt die Vergleichung der Koeffizienten der neg. ersten Potenzen

1. $A' = B' = C' = D'$.

Die Gleichungen IX ergeben die Beziehungen:

a) bei der Entwicklung um $\Theta_1 = \mu_1$:

2. $c' = c_1'$.

3. $d' = d_1'$.

b) bei der Entwicklung um $\Theta_1 = -\mu_1$:

$$4.\quad d' = 1 - c'.$$

$$5.\quad a' = 1 - b'.$$

$$f_{-1}\, d d' = -\frac{\sqrt{q}}{2}.$$

c) bei der Entwicklung um $\Theta_1 = \mu_4$:

$$6.\quad a' = 1 - d'.$$

$$7.\quad c' = 1 - b'.$$

$$g_{-1}\, d d' = \frac{\sqrt{q}}{2}.$$

Da die Beziehung gilt:

$$c' = c_1',$$

so folgt hieraus:

$$C' = 0$$

und mithin auch:

$$A' = 0, \quad D' = 0.$$

Dies hat zur Folge, daß:

$$a' = a_1', \quad b' = b_1'$$

Wir haben bis jetzt gefunden:

$$a_1' = a', \quad b_1' = b', \quad c_1' = c', \quad d_1' = d'.$$

$$a' = 1 - b' = c' = 1 - d'.$$

Da die Summe der Residuen Null wird, so braucht kein weiterer Unendlichkeitspunkt hinzuzutreten. Daß aber tatsächlich kein weiterer Punkt hinzutritt, wird erst die Bestimmung von x lehren. Zunächst wollen wir uns aber zur Berechnung der Absolutglieder wenden. Die Gleichungen VIII werden auf Grund der gefundenen Resultate für alle Werte von t und x identisch erfüllt. Die Gleichungen IX geben die Beziehungen

a) bei der Entwicklung um $\Theta_1 = \mu_1$:

$$b^2 - b_1^2 = d_1^2 - d^2,$$

$$a^2 - a_1^2 = c_1^2 - c^2$$

b) bei der Entwicklung um $\Theta_1 = -\mu_1$:

$$a_1^2 - b_1^2 = c^2 - d^2$$

$$c_1^2 - d_1^2 = a^2 - b^2$$

c) bei der Entwicklung um $\Theta_1 = \mu_4$:

$$a_1^2 - d_1^2 = c^2 - b^2$$

$$c_1^2 - b_1^2 = a^2 - d^2$$

Hieraus lassen sich die Beziehungen herleiten:

$$a_1 = c, \quad b_1 = d, \quad c_1 = a, \quad d_1 = b.$$

Um die Größe x und die Größen u_1, u_2, u_3 zu bestimmen, gehen wir genau so wie früher vor. Wir finden:

$$u_1 = \frac{t_3}{t_2}, \quad u_2 = \frac{1}{t_2}, \quad u_3 = \frac{t_1}{t_2}, \quad x = -\frac{1}{t_2}.$$

Wir haben somit das Resultat erhalten:

Resultat: Im Falle $e_{-1} = 0$, $f_{-1} \neq 0$, $g_{-1} \neq 0$ erhalten wir einen übergeschlossenen Mechanismus, für den die Beziehungen gelten:

$$a_1' = a', \quad b_1' = b', \quad c_1' = c', \quad d_1' = d'$$

$$a' = 1 - b' = c' = 1 - d';$$

$$a_1 = c, \quad b_1 = d, \quad c_1 = a, \quad d_1 = b$$

$$u_1 = \frac{t_3}{t_2}, \quad u_2 = \frac{1}{t_2}, \quad u_3 = \frac{t_1}{t_2}, \quad x = -\frac{1}{t_2}.$$

Dieser Fall findet sich bei Darboux als 1. Unterfall des 3. Hauptfalles.

Aus den gefundenen Beziehungen wollen wir einige herausgreifen und diese geometrisch deuten. Zunächst sagen uns die Beziehungen

$$a' = 1 - b' = c' = 1 - d'$$

daß die Dreiecke, die zum äußeren Gelenkvierecke gehören, sämtlich ähnlich sind. Das Viereck $ABCD$ ist ein Parallelogramm, denn

$$AB = (1-a')(at_1' + bt_2')$$
$$BC = a'(bt_2' + ct_3')$$
$$CD = (1-a')(ct_3' + dt_4')$$
$$DA = a'(dt_4' - at_1')$$

Ferner ist:

$$\overline{AM_1}^2 = a_1^2 a_1' \alpha_1' = c^2 c' \gamma' = \overline{PC}^2$$
$$\overline{DM_1}^2 = d_1^2(1-d_1')(1-\delta_1') = b^2(1-b')(1-\beta') = \overline{PB}^2$$
$$\overline{AN_1}^2 = a_1^2(1-a_1')(1-\alpha_1') = c^2(1-c')(1-\gamma') = \overline{QC}^2$$
$$\overline{BN_1}^2 = b_1^2 b_1' \beta_1' = d^2 d' \delta' = \overline{QD}^2$$
$$\overline{BP_1}^2 = b_1^2(1-b_1')(1-\beta_1') = d^2(1-d')(1-\delta') = \overline{MD}^2$$
$$\overline{CP_1}^2 = c_1^2 c_1' \gamma_1' = a^2 a' \alpha' = \overline{MA}^2$$
$$\overline{CQ_1}^2 = c_1^2(1-c_1')(1-\gamma_1') = a^2(1-a')(1-\alpha') = \overline{NA}^2$$
$$\overline{DQ_1}^2 = d_1^2 d_1' \delta_1' = b^2 b' \beta' = \overline{NB}^2$$

Auf Grund dieser Beziehungen ist der Mechanismus konstruierbar (s. Fig. 8).

Als Spezialfall ist gleichfalls nur der Fall möglich, daß die Dreiecke, die zum äußeren Gelenkvierecke gehören, als auch die, die zum inneren gehören, sämtlich in Gerade zusammenschrumpfen (s. Fig. 9). Die Konstruktion dieses Mechanismus ähnelt der des allgemeinen. Damit haben wir diesen Fall erledigt, und wir können folgenden Satz aussprechen:

Lehrsatz: Im Falle $e_{-1} = 0$, $f_{-1} \neq 0$, $g_{-1} \neq 0$, gibt es einen allgemeinen Mechanismus, Typus A. Durch Spezialisation findet man einen vom Typus A_4.

§ 10.

Untersuchung der Fälle: A. $e_{-1} \neq 0$, $f_{-1} \neq 0$, $g_{-1} = 0$.
B. $e_{-1} \neq 0$, $f_{-1} = 0$, $g_{-1} \neq 0$,

A. Untersuchung des Falles: $e_{-1} \neq 0$, $f_{-1} \neq 0$, $g_{-1} = 0$.

Setzen wir die Entwicklungen in die Gleichungen VIII ein, so erhalten wir durch Vergleichung der Koeffizienten der neg. ersten Potenzen die Beziehung

$$1.\quad B' = C' = D'.$$

Nun wollen wir die Gleichungen IX betrachten. Bestimmen wir die Koeffizienten von $(\Theta_1 - \mu_1)^{-1}$, so finden wir die Beziehungen:

$$e_{-1} d d_1 (1 - d'_1) = a' \sqrt{q}$$

$$2. \quad c'_1 d' + (1 - c'_1)(1 - b') = 0.$$

$$e_{-1} d d_1 d'_1 = -(1 - c') \sqrt{q}.$$

Aus der ersten und letzten Beziehung können wir folgende herleiten:

$$3. \quad a d'_1 + (1 - c')(1 - d'_1) = 0.$$

Bei der Bestimmung der Koeffizienten von $(\Theta_1 + \mu_1)^{-1}$ ergeben sich die Beziehungen:

$$f_{-1} d d_1 (1 - d'_1) = -\frac{a'}{2} \sqrt{q}$$

$$f_{-1} d d_1 d'_1 \frac{c'_1}{1 - c'_1} = -\frac{1 - b'}{2} \sqrt{q}$$

$$4. \quad 1 - c' = d'.$$

Aus den beiden ersten Beziehungen folgt:

$$5. \quad a' c'_1 d'_1 = (1 - b')(1 - c'_1)(1 - d'_1).$$

Die Entwicklung um $\Theta_1 = \mu_4$ ergibt nur

$$g_0 = \frac{d_1}{d} \frac{\vartheta'_1}{\vartheta'}.$$

Aus diesen bis jetzt gefundenen Beziehungen lassen sich folgende herleiten:

$$1 - c' = d'. \qquad c'_1 = \frac{b' - 1}{b' + d' - 1}, \qquad d'_1 = \frac{c' - 1}{a' + c' - 1},$$

$$b'_1 = \frac{b'}{b' + d' - 1}, \qquad a'_1 = \frac{d' - 1}{b' + d' - 1}.$$

Dann nehmen die Gleichungen VIII die Form an:

$$\text{VIII.}\begin{cases} x a t_1 (A' - B') \\ + d_1 (-(1-a'_1)(1-b'_1)(1-c'_1)(1-d'_1) + a'_1 b'_1 c'_1 d'_1) = 0 \\ \frac{1}{x} a \frac{1}{t_1} (\mathfrak{A}' - \mathfrak{B}') \\ + d_1 (-(1-\alpha'_1)(1-\beta'_1)(1-\gamma'_1)(1-\delta'_1) + \alpha'_1 \beta'_1 \gamma'_1 \delta'_1 = 0. \end{cases}$$

Entwickeln wie die zweite Gleichung um $\Theta_1 = \mu_4$, so erhalten wir zu den gefundenen Beziehungen noch die Beziehung

$$a' = 1 - b'.$$

Dann werden die Gleichungen VIII für alle Werte von t und x identisch erfüllt. Wir haben bis jetzt gefunden:

$$a' = 1 - b', \quad c' = 1 - d'$$

$$a'_1 = \frac{d'-1}{b'+d'-1}, \qquad b'_1 = \frac{b'}{b'+d'-1},$$

$$c'_1 = \frac{b'-1}{b'+d'-1}, \qquad d'_1 = \frac{d'}{b'+d'-1}.$$

Da die Summe der Residuen Null wird, so braucht ein weiterer Unendlichkeitspunkt nicht hinzuzutreten; die Berechnung von x wird es bestätigen. Wir wenden uns zur Bestimmung der Absolutglieder, die die Gleichungen IX ergeben, wenn wir um die einzelnen Unendlichkeitspunkte entwickeln. Bei der Entwicklung um $\Theta_1 = \mu_1$ erhalten wir die Beziehungen:

$$a_1^2 c' + c_1^2 a' = l^2 (d^2 c' + b^2 a')$$
$$b_1^2 c' + d_1^2 a' = l^2 (a^2 a' + c^2 c').$$

Bei der Entwicklung um $\Theta_1 = -\mu_1$ erhalten wir:

$$a_1^2 - b_1^2 = l^2 (d^2 - c^2)$$
$$c_1^2 - d_1^2 = l^2 (b^2 - a^2).$$

Endlich ergibt die Entwicklung um $\Theta_1 = \mu_4$:

$$a_1^2 c' - d_1^2 a' = l^2 (d^2 c' - a^2 a')$$
$$b_1^2 c' - c_1^2 a' = l^2 (c^2 c' - b^2 a').$$

Hierbei bedeutet

$$l^2 = (b' + d' - 1)(\beta' + \delta' - 1).$$

Hieraus folgt ohne weiteres:

$$a_1 = ld, \quad b_1 = lc, \quad c_1 = lb, \quad d_1 = la.$$

Es bleibt nur noch übrig, die Größe $\frac{1}{x}$ und die Größen u zu ermitteln. Indem wir, wie früher vorgehen, finden wir:

$$u_1 = \frac{1}{t_1}, \quad u_2 = \frac{t_2}{t_1}, \quad u_3 = \frac{t_2}{t_1},$$

$$x = -\frac{l}{b' + d' - 1} \cdot \frac{1}{t_1}.$$

Hiermit ist dieser Fall erledigt, und wir können das Resultat aussprechen:

Resultat: Im Falle $e_{-1} \neq 0$, $f_{-1} \neq 0$, $g_{-1} = 0$ gibt es einen übergeschlossenen Mechanismus, für den die Beziehungen bestehen:

$$a' = 1 - b', \quad c' = 1 - d'.$$

$$a_1' = \frac{d' - 1}{b' + d' - 1}, \qquad b_1' = \frac{b'}{b' + d' - 1},$$

$$c_1' = \frac{b' - 1}{b' + d' - 1}, \qquad d_1' = \frac{d'}{b' + d' - 1}.$$

$$a_1 = ld, \quad b_1 = lc, \quad c_1 = lb, \quad d_1 = la$$

$$u_1 = \frac{1}{t_1}, \quad u_2 = \frac{t_3}{t_1}, \quad u_2 = \frac{t_2}{t_1},$$

$$x = -\frac{l}{b' + d' - 1} \cdot \frac{1}{t_1} \qquad l^2 = (b' + d' - 1)(\beta' + \delta' - 1).$$

Bei Darboux findet sich dieser Fall als der 1. Unterfall des 2. Hauptfalles.

Hieran wollen wir einige geom. Betrachtungen knüpfen. Wir ersehen aus den Beziehungen

$$a' = 1 - b', \quad c' = 1 - d',$$

daß je zwei anstoßende Dreiecke des äußeren Gelenkviereckes ähnlich sind. Analoges gilt auch für die des inneren Gelenk-

viereckes. Ferner ist die Strecke DM_1 parallel und gleich der Strecke MA, das Gleiche gilt auch für M_1A und MD, P_1C und PB, P_1B und PC. Es sind also die Vierecke MAM_1D PBP_1C Parallelogramme. Für die Seiten Q_1D, Q_1C, N_1A, N_1B erhalten wir die Werte:

$$\overline{Q_1D}^2 = a^2 d' \delta', \quad \overline{Q_1C}^2 = b^2 d' \delta', \quad \overline{N_1A}^2 = d^2 b' \beta', \quad \overline{N_1B}^2 = c^2 b' \beta'.$$

Der Mechanismus ist in Fig. 10 angegeben. Als einzigen Spezialfall ergibt sich auch dieses Mal ein Mechanismus vom Typus A_4. Seine Konstruktion ist in Fig. 11 durchgeführt.

B. In sehr enger Beziehung zu dem jetzt behandelten Falle steht der Fall $e_{-1} \neq 0$, $f_{-1} = 0$, $g_{-1} \neq 0$. Diesem entspricht ein Mechanismus, der die notwendige Ergänzung zu dem in jenem behandelten bildet. Wir können uns mit der Angabe der Resultate begnügen. Sie lauten:

$$a' = 1 - d', \quad b' = 1 - c'.$$

$$a_1' = \frac{d' - 1}{b' + d' - 1}, \qquad b_1' = \frac{d'}{b' + d' - 1},$$

$$c_1' = \frac{b' - 1}{b' + d' - 1}, \qquad d_1' = \frac{b'}{b' + d' - 1}.$$

$$a_1 = lb, \quad b_1 = la, \quad c_1 = ld, \quad d_1 = lc, \quad l^2 = (b' + d' - 1)(\beta' + \delta' - 1).$$

$$u_1 = \frac{t_2}{t_3}, \quad u_2 = \frac{t_1}{t_3}, \quad u_3 = \frac{1}{t_3}, \quad x = \frac{l}{b' + d' - 1} \cdot \frac{1}{t_3}.$$

Die hierzu gehörigen Mechanismen sind in Fig. 12 und 13 angegeben.

Wir könneu diesen Paragraphen mit dem Satze schließen:

Lehrsatz: Im Falle $e_{-1} \neq 0$, $f_{-1} \neq 0$, $g_{-1} = 0$ und
$e_{-1} \neq 0$, $f_{-1} = 0$, $g_{-1} \neq 0$
gibt es zunächst je einen Mechanismus vom Typus A. Durch Spezialisation erhalten wir je einen vom Typus A_4.

§ 11.

Fall: $e_{-1} \neq 0$, $f_{-1} = 0$, $g_{-1} = 0$.

Setzen wir zunächst die Entwicklungen in die Gleichungen VIII ein, so ergibt die Vergleichung der Koeffizienten der neg. ersten Potenzen die Beziehung:

$$1. \quad A' = B' = C' = D'.$$

Dann nimmt die erste der Gleichungen VIII die Formen:

$$d_1(-(1-a_1')(1-b_1')(1-c_1')(1-d_1') + a_1' b_1' c_1' d_1') + x A' (a t_1 + b t_2 + c t_3 + d) = 0.$$

Hieraus folgt:

$$2. \quad a_1' b_1' c_1' d_1' = (1-a_1')(1-b_1')(1-c_1')(1-d_1').$$

Weitere Beziehungen ergeben die Gleichungen VIII nicht.

Nun wollen wir die Entwicklungen in die Gleichungen IX einsetzen und auch dort die Koeffizienten der neg. ersten Potenzen bestimmen. Bei der Entwicklung um $\Theta_1 = \mu_1$ finden wir:

$$e_{-1} d d_1 (1-d_1') = \frac{\sqrt{q}}{2} a'.$$

$$3. \quad (1-b')(1-c_1') + c_1' d' = 0.$$

$$e_{-1} d d_1 d_1' = -\frac{\sqrt{q}}{2}(1-c').$$

Aus der ersten und letzten Beziehung folgt:

$$4. \quad a' d_1' + (1-c')(1-d_1') = 0.$$

Bei der Entwicklung um $\Theta_1 = -\mu_1$ erhalten wir:

$$5. \quad \frac{1-d_1'}{1-d'} = \frac{c_1'}{c'}$$

und endlich bei der Entwicklung um $\Theta_1 = \mu_4$:

$$g_0 = \frac{d_1 d_1'}{d d'}.$$

Aus diesen fünf Beziehungen können wir die Relationen herleiten:

$$a_1' = \frac{d'-1}{b'+d'-1}, \qquad b_1' = \frac{a'-1}{a'+c'-1},$$

$$c_1' = \frac{b'-1}{b'+d'-1}, \qquad d_1' = \frac{c'-1}{a'+c'-1}.$$

$$a' b' c' d' = (1-a')(1-b')(1-c')(1-d').$$

Hierzu ist zu bemerken, daß Darboux irrtümlicherweise einen anderen Wert für d_1' angibt.

Da die Summe der Residuen Null sein muß, so hat noch ein zweiter Unendlichkeitspunkt hinzuzutreten. Er ist dadurch bestimmt, daß in ihm ist:

$$\mathfrak{T}_1 = 0, \quad \mathfrak{T}_2 = 0, \quad \mathfrak{T}_3 = 0.$$

Wir erhalten hieraus die Werte:

$$\frac{1}{t_1} = -\frac{d}{a}\frac{1-\delta'}{\alpha'}, \quad \frac{1}{t_2} = \frac{d}{b}\frac{\delta'\gamma'}{(1-\beta')(1-\gamma')}, \quad \frac{1}{t_3} = -\frac{d}{c}\frac{\delta'}{1-\gamma'}.$$

Setzen wir diese Werte in die Gleichung:

$$at_1 + bt_2 + ct_3 + d = 0$$

ein, so erhalten wir die Beziehung:

$$a^2(1-a')(1-b') - b^2b'(1-b') + c^2c'b' - \frac{b'c'd'}{1-c'}d^2 = 0.$$

Hierzu können wir eine weitere Beziehung hinzufügen, indem wir die zu jener konj. kompl. Beziehung bilden:

$$a^2(1-\alpha')(1-\beta') - b^2\beta'(1-\beta') + c^2\gamma'\beta' - \frac{\beta'\gamma'\delta'}{1-\gamma'}d^2 = 0.$$

Die Form der Gleichungen VIII und IX ist eine solche, daß es gleich ist, ob wir von der Größe $\frac{1}{x}$ ausgehen und um

$$\Theta_1 = \mu_1, \quad \Theta_1 = -\mu_1, \quad \Theta_1 = \mu_4$$

entwickeln, oder ob wir von der Größe x ausgehen und die Entwicklungen um

$$\Theta_1 = \mu_1 + 2iK', \quad \Theta_1 = -\mu_1 + 2iK', \quad \Theta_1 = \mu_4 + 2iK'$$

bilden. Dem Unendlichkeitspunkt $\Theta_1 = \mu_1$ entspricht der Punkt $\Theta_1 = \mu_1 + 2iK'$. Zu dem Punkt $\Theta_1 = \mu_1$ mußte noch ein weiterer Unendlichkeitspunkt hinzukommen; er sei $\Theta_1 = \mu_5$, ist dadurch bestimmt, daß in ihm die Koeffizienten von $\left(\frac{1}{x}\right)^2$ der Gleichungen IX verschwinden. Diesem Punkt $\Theta_1 = \mu_5$ wird ein Punkt $\Theta_1 = \mu_5 + 2iK'$ entsprechen; in ihm wird x unendlich werden. Im Punkte $\Theta_1 = \mu_5$ ist:

$$\frac{1}{t_1} = -\frac{d}{a}\frac{1-\delta'}{\alpha'}, \quad \frac{1}{t_2} = \frac{d}{b}\frac{\delta'\gamma'}{(1-\beta')(1-\gamma')}, \quad \frac{1}{t_3} = -\frac{d\delta'}{c(1-\gamma')};$$

im Punkte $\Theta_1 = \mu_5 + 2iK'$ ergeben sich dann folgende Werte:

$$t_1 = -\frac{d}{a}\frac{1-\delta'}{\alpha'}, \quad t_2 = \frac{d}{b}\frac{\delta'\gamma'}{(1-\beta')(1-\gamma')}, \quad t_3 = -\frac{d}{c}\frac{\delta'}{1-\gamma'}.$$

Für diese Werte von t müssen die Koeffizienten von x^2 der Gleichungen IX verschwinden. Wir erhalten hieraus die Beziehungen:

$$T_1 = -a\alpha'\frac{d}{a}\frac{1-\delta'}{\alpha'} + (1-d') = 0, \quad T_2 = 0, \quad T_3 = 0.$$

Hiermit finden wir die Relationen:

$$\frac{1-d'}{\alpha'} = \frac{1-\delta'}{\alpha'}, \quad \frac{1-c'}{d'} = \frac{1-\gamma'}{\delta'}, \quad \frac{1-b'}{c'} = \frac{1-\beta'}{\gamma'}.$$

Unter Beachtung der Beziehungen

$$a'b'c'd' = (1-a')(1-b')(1-c')(1-d')$$
$$\alpha'\beta'\gamma'\delta' = (1-\alpha')(1-\beta')(1-\gamma')(1-\delta')$$

können wir noch die weitere finden:

$$\frac{1-a'}{b'} = \frac{1-\alpha'}{\beta'}.$$

Hiernach wollen wir die Gleichungen IX betrachten und die Absolutglieder in den einzelnen Entwicklungen bestimmen. Wir finden die Beziehungen:

a) bei der Entwicklung um $\Theta_1 = \mu_1$:

$$a_1^2 b'c' + c_1^2(1-a')(1-b') = l^2\left(b^2b'(1-b') + \frac{b'c'd'}{1-c'}d^2\right)$$
$$b_1^2\frac{b'c'd'}{1-c'} + d_1^2b'(1-b') = l^2\left(a^2(1-b')(1-a') + c^2b'c'\right)$$

b) bei der Entwicklung um $\Theta_1 = -\mu_1$:

$$a_1^2b'c' - b_2^1\frac{b'c'd'}{1-c'} = l^2\left(b^2b'(1-b') - a^2(1-a')(1-b')\right)$$
$$c_1^2(1-a')(1-b') - d_1^2b'(1-b') = l^2\left(d^2\frac{b'c'd'}{1-c'} - c^2b'c'\right)$$

c) bei der Entwicklung um $\Theta = \mu_4$:

$$a_1^2b'c' - d_1^2b'(1-b') = l^2\left(\frac{b'c'd'}{1-c'}d^2 - a^2(1-a')(1-b')\right)$$
$$b_1^2\frac{b'c'd'}{1-c'} - c_1^2(1-a')(1-b') = l^2\left(c^2b'c' - b^2(1-b')b'\right)$$

wo

$$l^2 = \frac{a'c'}{(1-b')(1-d')}(b'+d'-1)(\beta'+\delta'-1)$$

$$= \frac{b'd'}{(1-a')(1-c')}(a'+c'-1)(\alpha'+\gamma'-1).$$

Hieraus folgt ohne weiteres:

$$a_1 = lc, \quad b_1 = ld, \quad c_1 = la, \quad d_1 = lb.$$

Es bleibt nur noch übrig, die Größe x und die Größen u zu ermitteln. Wir gehen zu diesem Zwecke genau so wie früher vor und erhalten:

$$u_1 = \frac{t_2}{t_3}, \quad u_2 = t_2, \quad u_3 = \frac{t_2}{t_1}, \quad \frac{1}{x} = \frac{a'+c'-1}{l} \frac{c\frac{t_3}{t_2} + b\frac{1-\beta'}{\gamma'}}{\frac{a}{t_1}\frac{\alpha}{1-\delta'} + d}.$$

Wir können das Resultat aussprechen:

Resultat: Im Falle $e_{-1} \neq 0$, $f_{-1} = 0$, $g_{-1} = 0$ gibt es einen übergeschlossenen Mechanismus, für den die Beziehungen gelten:

$$a'b'c'd' = (1-a')(1-b')(1-c')(1-d')$$

$$a^2(1-a')(1-b') - b^2b'(1-b') + c^2b'c' - d^2\frac{b'c'd'}{1-c'} = 0$$

$$\frac{a'}{1-d'} = \frac{\alpha'}{1-\delta'}, \quad \frac{b'}{1-a'} = \frac{\beta'}{1-\alpha'}, \quad \frac{c'}{1-b'} = \frac{\gamma'}{1-\beta}, \quad \frac{d'}{1-c'} = \frac{\delta'}{1-\gamma'}.$$

$$a_1' = \frac{d'-1}{b'+d'-1}, \quad b_1' = \frac{a'-1}{a'+c'-1}.$$

$$c_1' = \frac{b'-1}{b'+d'-1}, \quad d_1' = \frac{c'-1}{a'+c'-1}.$$

$$a_1 = lc, \quad b_1 = ld, \quad d_1 = lb, \quad c_1 = la.$$

$$l^2 = \frac{a'c'}{(1-b')(1-d')}(b'+d'-1)(\beta'+\delta'-1)$$

$$= \frac{b'd'}{(1-a')(1-c')}(a'+c'-1)(\alpha'+\gamma'-1)$$

$$u_1 = \frac{t_2}{t_3}, \quad u_2 = t_2, \quad u_3 = \frac{t_2}{t_1}, \quad \frac{1}{x} = \frac{a'+c'-1}{l} \frac{c\frac{t_3}{t_2} + b\frac{1-b'}{l}}{\frac{a}{t_1}\frac{a'}{1-d} + d}.$$

Dieser Fall findet sich bei Darboux als zweiter Unterfall des dritten Hauptfalles.

Hieran wollen wir einige geometrische Betrachtungen knüpfen. Die Beziehungen:

$$\frac{a'}{1-d'} = \frac{\alpha'}{1-\delta'}, \quad \frac{b'}{1-a'} = \frac{\beta'}{1-\alpha'}, \quad \frac{c'}{1-b'} = \frac{\gamma'}{1-\beta'}, \quad \frac{d'}{1-c'} = \frac{\delta'}{1-\gamma'}$$

sagen aus, daß die Winkel an jeder Ecke des äußeren Gelenkviereckes gleich sind. Das Gleiche gilt für das innere Gelenkviereck.

Aus den Beziehungen:

$$\begin{cases} a^2(1-a')(1-b') - b^2b'(1-b') + c^2c'b' - d^2\frac{b'c'd'}{1-c'} = 0 \\ a^2(1-\alpha')(1-\beta') - b^2\beta'(1-\beta') + c^2\gamma'\beta' - d^2\frac{\beta'\gamma'\delta'}{1-\gamma'} = 0 \end{cases}$$

läßt sich folgende gewinnen:

$$a^2(a'-\alpha') + b^2(b'-\beta') + c^2(c'-\gamma') + d^2(d'-\delta') = 0.$$

Diese Beziehung sagt aus, daß die algebraische Summe der vier Dreiecke, die man über den Seiten des äußeren Gelenkviereckes errichtet, Null sein muß. Für das innere Gelenkviereck besteht die gleiche Eigenschaft. Die Relation hat nur einen Sinn, wenn man den Dreiecken ein Vorzeichen beilegt, das positive, wenn man das Dreieck im Uhrzeigersinne durchläuft, das negative, wenn es im entgegengesetzten Sinne geschieht.

Der Mechanismus ist in Fig. 14 angegeben. Als einziger Spezialfall ergibt sich auch dieses Mal nur ein Mechanismus vom Typus A_4. Seine Konstruktion ist in Fig. 15 durchgeführt.

Wir können diesen Paragraphen mit dem Satze schließen:

Lehrsatz: Im Falle $e_{-1} \neq 0$, $f_{-1} = 0$, $g_{-1} = 0$ gibt es einen Mechanismus vom Typus A. Als einziger Spezialfall ergibt sich ein solcher vom Typus A_4.

II. Teil.

§ 12.

Untersuchung des zweiten Problems.

Im ersten Teile haben wir die Theorie des allgemeinen Gelenksystems, Typus A_1 aufgestellt und haben dabei stets gesucht, aus den allgemeinen Resultaten die Existenz speziellerer Mechanismen zu erschließen. Dabei hat es sich gezeigt, daß nur Mechanismen vom Typus A_4 gewonnen werden können. Die Typen A_1, A_2, A_3 können nicht vorkommen. Damit sind die Fälle erledigt, die auf Grund der allgemeinen Resultate durchgeführt werden können. Um die wichtige Spezialisation, nämlich die, daß das innere Gelenkviereck in einen Punkt zusammenschrumpft, zu erledigen, bedarf es einer neuen Untersuchung. Soweit es geht, wollen wir uns an die frühere Darstellung halten. Der Ausgangspunkt unserer Betrachtungen ist das Gelenksystem, das mit Typus A_5 bezeichnet ist. Die Seiten des Gelenkviereckes $MNPQ$ sind a, b, c, und d; die Winkel, die diese mit einer festen Geraden bilden, ω_1', ω_2', ω_3', ω_4'. Hierzu definieren wir Größen:

$$t_1' = e^{i\omega_1'}, \quad t_2' = e^{i\omega_2'}, \quad t_3' = e^{i\omega_3'}, \quad t_4' = e^{i\omega_4'}.$$

Die Strecken AF, BF, CF, DF bezeichnen wir mit m, n, r und s; die Winkel, die diese mit derselben festen Geraden bilden, sind: ψ_1', ψ_2', ψ_3', ψ_4'. Hierzu gehören die Größen:

$$u_1' = e^{i\psi_1'}, \quad u_2' = e^{i\psi_2'}, \quad u_3' = e^{i\psi_3'}, \quad u_4' = e^{i\psi_4'}.$$

Wenn wir wieder folgende Beziehungen einführen:

$$t_1 = \frac{t_1'}{t_4'}, \quad t_2 = \frac{t_2'}{t_4'}, \quad t_3 = \frac{t_3'}{t_4'},$$

$$u_1 = \frac{u_1'}{u_4'}, \quad u_2 = \frac{u_2'}{u_4'}, \quad u_3 = \frac{u_3'}{u_4'}, \quad x = \frac{t_1'}{u_4'}$$

so erkennen wir ohne weiteres, daß die Gleichungen V bestehen bleiben.

$$\text{V}'. \quad \begin{cases} a t_1 + b t_2 + c t_3 + d = 0 \\ \frac{a}{t_1} + \frac{b}{t_2} + \frac{c}{t_3} + d = 0 \end{cases}$$

Die Gleichungen VI verschwinden aber; dies hat zur Folge, daß auch das Gleichungssystem VIII verschwindet. Das Gleichungssystem VII bleibt aber im wesentlichen bestehen; wir können es leicht in die neue Form überführen, wenn wir folgende Substitutionen vornehmen. Wir setzen:

$$m = -a_1 a_1' = -a_1 \alpha_1' = a_1(1-a_1') = a_1(1-\alpha_1')$$
$$n = -b_1 b_1' = -b_1 \beta_1' = b_1(1-b_1') = b_1(1-\beta_1')$$
$$r = -c_1 c_1' = -c_1 \gamma_1' = c_1(1-c_1') = c_1(1-\gamma_1')$$
$$s = -d_1 d_1' = -d_1 \delta_1' = d_1(1-d_1') = d_1(1-\delta_1')$$

Dann erhalten wir:

$$\text{VII}'. \quad \begin{cases} m u_1 = s - x T_1 \\ \frac{m}{u_1} = s - \frac{1}{x}\mathfrak{T}_1 \\ n u_2 = s + x T_2 \\ \frac{n}{u_2} = s + \frac{1}{x}\mathfrak{T}_2 \\ r u_3 = s + x T_3 \\ \frac{r}{u_3} = s + \frac{1}{x}\mathfrak{T}_3 \end{cases}$$

Hierin bedeutet

$$T_1 = a a' t_1 + d(1-d')$$
$$T_2 = b(1-b')\, t_2 + c t_3 + d d'$$
$$T_3 = c(1-c')\, t_3 + d d'.$$

Daß obige Substitutionen berechtigt sind, kann man leicht dadurch nachweisen, daß man, wie im ersten Teile angegeben

ist, entsprechende Beziehungen für die Vierecke $MAFD$, $NBFA$, $PCFB$, $QDFC$ aufstellt.

Aus den Gleichungen VII′ lassen sich, analog dem früher eingeschlagenen Verfahren, folgende Gleichungen gewinnen:

$$\text{IX}'. \quad \begin{cases} x T_1 s + \frac{1}{x} \mathfrak{T}_1 s = -m^2 + s^2 + T_1 \mathfrak{T}_1 \\ x T_2 s + \frac{1}{x} \mathfrak{T}_2 s = \quad n^2 - s^2 - T_2 \mathfrak{T}_2 \\ x T_3 s + \frac{1}{x} \mathfrak{T}_3 s = \quad r^2 - s^2 - T_3 \mathfrak{T}_3. \end{cases}$$

Die Aufgabe ist nun leicht ersichtlich:

Wir haben die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür aufzustellen, daß obige drei Gleichungen IX′ für unendlich viele Werte eines Parameters Θ_1 bestehen.

Zu diesem Zwecke gehen wir genau so vor, wie es im 1. Teile geschehen ist, und wir werden dabei wieder auf die Untersuchung von acht und nur acht Fällen geführt:

1. alle drei Größen e_{-1}, f_{-1}, g_{-1} sind von Null verschieden;

2. alle drei Größen sind gleich Null;

3. eine von ihnen ist Null, die anderen zwei von Null verschieden;

4. zwei dieser Größen sind Null, die dritte von Null verschieden.

§ 13.

Erledigung der Fälle, wo e_{-1} gleich Null ist.

Setzen wir die Entwicklungen um $\Theta_1 = \mu_1$ in die Gleichungen IX′ ein und vergleichen wir die Koeffizienten der neg. ersten Potenzen, so finden wir die Beziehungen:

$$e_0 = -\frac{s}{d(1-\delta')},$$

$$e_0 = -\frac{s}{d\delta' - d(1-\beta')},$$

$$e_0 = -\frac{s}{d\delta'}.$$

Diese drei Beziehungen können aber im allgemeinen nicht zusammenbestehen. Wir sind daher berechtigt, bei unseren Untersuchungen die vier Fälle wegzulassen, wo e_{-1} gleich Null ist. Wir können uns auf die vier Fälle beschränken:

1. $e_{-1} \neq 0, \quad f_{-1} \neq 0, \quad g_{-1} \neq 0.$
2. $e_{-1} \neq 0, \quad f_{-1} \neq 0, \quad g_{-1} = 0.$
3. $e_{-1} \neq 0, \quad f_{-1} = 0, \quad g_{-1} \neq 0.$
4. $e_{-1} \neq 0, \quad f_{-1} = 0, \quad g_{-1} = 0.$

Diese wollen wir nun untersuchen.

§ 14.

Untersuchung des Falles: $e_{-1} \neq 0, \; f_{-1} \neq 0, \; g_{-1} \neq 0.$

Setzen wir die Entwicklungen um die Punkte $\Theta_1 = \mu_1$, $\Theta_1 = -\mu_1$, $\Theta_1 = \mu_4$ in die einzelnen Gleichungen ein, so ergibt die Vergleichung der Koeffizienten der neg. ersten Potenzen die Beziehungen

a) wenn $\Theta_1 = \mu_1$:

$$e_{-1}\, s = \frac{a'}{2d}\sqrt{q}$$
$$d' = 1 - b'$$
$$a' = 1 - c'$$

b) wenn $\Theta_1 = -\mu_1$:

$$f_{-1}\, s = -\frac{a'}{2d}\sqrt{q}$$
$$a' = 1 - b'$$
$$1 - c' = d'$$

c) wenn $\Theta_1 = \mu_4$:

$$g_{-1}\, s = -\frac{1 - c'}{2d}\sqrt{q}$$
$$a' = 1 - d'$$
$$c' = 1 - b'.$$

Aus diesen Beziehungen folgt

$$a' = \frac{1}{2}, \quad b' = \frac{1}{2}, \quad c' = \frac{1}{2}, \quad d' = \frac{1}{2}.$$

Hieraus erkennen wir, daß die Anschlußpunkte A, B, C und D auf den Seiten des Gelenkvierecks $MNPQ$ liegen und diese halbieren. Von einem Mechanismus, der dem Typus A_5 entspricht, kann dann nicht mehr die Rede sein; wir erhalten einen, der dem Typus A_6 entspricht.

Aus den gefundenen Beziehungen ersehen wir ferner, daß die Summe der Residuen nicht Null ist. Es muß also mindestens noch ein weiterer Unstetigkeitspunkt hinzutreten. Hierfür kommen einzig und allein die Stellen in Betracht, wo die Koeffizienten $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_3$ gleich Null sind. Hieraus folgt:

$$\frac{1}{t_1} = -\frac{d}{a}, \quad \frac{1}{t_2} = \frac{d}{b}, \quad \frac{1}{t_3} = -\frac{d}{c};$$

setzen wir diese Werte in

$$a t_1 + b t_2 + c t_3 + \mathrm{d} = 0$$

ein, so erhalten wir die Beziehung

$$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 0.$$

Die andere Gleichung

$$\frac{a}{t_1} + \frac{b}{t_2} + \frac{c}{t_3} + d = 0$$

ergibt nichts.

Hiernach wollen wir uns zur Bestimmung der Absolutglieder wenden. Wir erhalten die Beziehungen:

a) bei der Entwicklung um $\Theta_1 = \mu_1$:

$$m^2 + r^2 = \frac{b^2 + d^2}{4}$$

$$n^2 + s^2 = \frac{a^2 + c^2}{4}$$

b) bei der Entwicklung um $\Theta_1 = -\mu_1$:

$$m^2 - n^2 = \frac{d^2 - c^2}{4}$$

$$r^2 - s^2 = \frac{b^2 - a^2}{4}$$

c) bei der Entwicklung um $\Theta_1 = \mu_4$:

$$n^2 - r^2 = \frac{a^2 - d^2}{4}$$

$$m^2 - s^2 = \frac{b^2 - c^2}{4}$$

Hieraus folgen die Relationen:

$$m = \frac{a}{2}, \quad n = \frac{b}{2}, \quad r = \frac{c}{2}, \quad s = \frac{d}{2}.$$

Um die Größe x und die Größen u zu bestimmen, gehen wir genau so vor, wie es im 1. Teile geschehen ist. Wir finden dann

$$u_1 = -\frac{1}{t_1}, \quad u_2 = +\frac{1}{t_2}, \quad u_3 = -\frac{1}{t_3}, \quad \frac{1}{x} = \frac{at_1 + d}{a + dt_1} t_1.$$

Wir können jetzt folgendes Resultat aussprechen:

Im Falle $e_{-1} \neq 0$, $f_{-1} \neq 0$, $g_{-1} \neq 0$ gibt es keinen Mechanismus, der dem Typus A_5 entspricht, wohl aber gibt es einen, der dem spezielleren Typus A_6 entspricht. Für ihn gelten die Beziehungen:

$$a' = b' = c' = d' = \frac{1}{2}, \quad a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 0.$$

$$m = \frac{a}{2}, \quad n = \frac{b}{2}, \quad r = \frac{c}{2}, \quad s = \frac{d}{2}.$$

$$u_1 = -\frac{1}{t_1}, \quad u_2 = \frac{1}{t_2}, \quad u_3 = -\frac{1}{t_3}, \quad \frac{1}{x} = \frac{at_1 + d}{a + dt_1} t_1.$$

Dieser Fall entspricht dem dritten Fall in der 2. Arbeit Krauses. Den Mechanismus können wir auf Grund der angegebenen Resultate leicht konstruieren (s. Fig. 16). Der Mechanismus bildet die weitere Spezialisation zu den in § 6 behandelten Mechanismen.

§ 15.

Untersuchung der Fälle:

A. $e_{-1} \neq 0$, $f_{-1} \neq 0$, $g_{-1} = 0$
B. $e_1 \neq 0$, $f_1 = 0$, $g_1 \neq 0$.

A. Behandlung des Falles: $e_{-1} \neq 0$, $f_{-1} \neq 0$, $g_{-1} = 0$.

Vergleichen wir die Koeffizienten der neg. ersten Potenzen in den einzelnen Gleichungen, so erhalten wir genau wie im vorigen Falle folgende Beziehungen:

a) bei der Entwicklung um $\Theta_1 = \mu_1$:

$$e_{-1}s = \frac{a'}{2d}\sqrt{q}$$
$$d' = 1 - b'$$
$$a' = 1 - c'$$

b) bei der Entwicklung um $\Theta_1 = -\mu_1$:

$$f_{-1}s = -\frac{a'}{2d}\sqrt{q}$$
$$a' = 1 - b'$$
$$d' = 1 - c'.$$

Die Entwicklung um $\Theta_1 = \mu_4$ ergibt nichts Wesentliches. Hieraus folgen die Beziehungen:

$$a' = 1 - b' = 1 - c' = d'.$$

Da die Summe der Residuen Null ist, so braucht kein weiterer Unstetigkeitspunkt hinzuzutreten. Daß auch tatsächlich kein weiterer hinzukommt, wird die spätere Berechnung von x lehren. Wir wollen uns aber zunächst an die Vergleichung der Absolutglieder wenden. Wir finden hierbei die Beziehungen:

a) bei der Entwicklung um $\Theta_1 = \mu_1$:

$$m^2a' + r^2(1-a') = a'(1-a')\{d^2(1-a') + b^2a'\}$$
$$n^2a' + s^2(1-a') = a'(1-a')\{c^2(1-a') + a^2a'\}$$

b) bei der Entwicklung um $\Theta_1 = -\mu_1$:

$$m^2 - n^2 = (1-a')(1-a')\{c^2 - d^2\}$$
$$r^2 - s^2 = a'a'\{b^2 - a^2\}$$

c) bei der Entwicklung um $\Theta_1 = \mu_4$:

$$m^2a' - s^2(1-a') = a'(1-a')\{d^2(1-a') - a^2a'\}$$
$$n^2a' - r^2(1-a') = a'(1-a')\{c^2(1-a') - b^2a'\}$$

Aus diesen Beziehungen folgt:

$$m^2 = d^2(1-d')(1-\delta'), \quad n^2 = c^2c'\gamma',$$
$$r^2 = b^2(1-b')(1-\beta'), \quad s^2 = a^2a'a'.$$

Hieraus folgt weiter:

$$m = \overline{MD}, \quad n = \overline{PC}, \quad r = \overline{PB}, \; s = \overline{MA}.$$

Um x und die Größen u zu berechnen, gehen wir genau so wie früher vor und finden dann:

$$u_1 = -\sqrt{\frac{(1-a')\alpha'}{(1-\alpha')a'}}\,\frac{1}{t_1}, \qquad u_2 = \sqrt{\frac{(1-a')\alpha'}{(1-\alpha')a'}}\cdot\frac{t_3}{t_1},$$

$$u_3 = -\frac{t_2}{t_1}, \qquad \frac{1}{x} = \sqrt{\frac{a'}{\alpha'}}\,t_1.$$

Hiermit können wir das Resultat aussprechen:

Im Falle $e_{-1} \neq 0$, $f_{-1} \neq 0$, $g_{-1} = 0$ gibt es einen Mechanismus vom Typus A_5; für diesen gelten die Beziehungen:

$$a' = 1 - b' = 1 - c' = d'$$

$$m = \overline{MD}, \quad n = \overline{PC}, \quad r = \overline{PB}, \quad s = \overline{MA}$$

$$u_1 = -\sqrt{\frac{(1-a')\alpha'}{(1-\alpha')a'}}\,\frac{1}{t_1}, \qquad u_2 = \sqrt{\frac{(1-a')\alpha'}{(1-\alpha')a'}}\,\frac{t_3}{t_1},$$

$$u_3 = -\frac{t_2}{t_1}, \qquad \frac{1}{x} = \sqrt{\frac{a'}{\alpha'}}\,t_1.$$

Auf Grund der angegebenen Beziehungen ist es möglich, den Mechanismus zu konstruieren. Die Vierecke $MAFD$ und $PBFC$ sind Parallelogramme, ferner sind die zu den Seiten des Gelenkvierecke $MNPQ$ gehörenden Dreiecke ähnlich. Aus diesem Mechanismus läßt sich leicht ein spezieller gewinnen, wenn wir die Anschlußpunkte auf den Seiten des Gelenkviereckes wählen; dann erhalten wir einen Mechanismus vom Typus A_6. Letzterer ist in der 2. Arbeit Krauses als vierter behandelt worden, während den allgemeineren Burmester in seiner früher zitierten Arbeit angibt.

B. Im engen Zusammenhange mit diesem Falle steht der Fall: $e_{-1} \neq 0$, $f_{-1} = 0$, $g_{-1} \neq 0$. Wir erhalten hier Mechanismen, die die notwendige Ergänzung zu den im vorigen Falle behandelten bilden. Wir können uns darauf beschränken, nur das Resultat anzugeben:

Resultat: Im Falle: $e_{-1} \neq 0$, $f_{-1} = 0$, $g_{-1} \neq 0$ gibt es einen übergeschlossenen Mechanismus vom Typus A_5; für diesen gelten die Beziehungen:

$$a' = b' = 1 - c' = 1 - d'$$

$$m = \overline{NB}, \quad n = \overline{NA}, \quad r = \overline{QD}, \quad s = \overline{QC}.$$

$$u_1 = -\frac{t_2}{t_3}, \qquad u_2 = \sqrt{\frac{(1-a')\,a'}{(1-a')\,a'}} \cdot \frac{t_1}{t_3},$$

$$u_3 = -\sqrt{\frac{(1-a')\,a'}{(1-a')\,a'}} \cdot \frac{1}{t_3}; \quad \frac{1}{x} = -\sqrt{\frac{a'}{a'}}\, t_3.$$

Diesen Mechanismus können wir noch spezialisieren und finden dann einen vom Typus A_6.

Hiermit können wir die Untersuchung dieser beiden Fälle abschließen; wir fassen die gefundenen Resultate in den Satz zusammen.

Satz: Im Falle

$$e_{-1} \neq 0, \quad f_{-1} \neq 0, \quad g_{-1} = 0;$$
$$e_{-1} \neq 0, \quad f_{-1} = 0, \quad g_{-1} \neq 0$$

gibt es je einen Mechanismus vom Typus A_5. Er bildet eine Ergänzung zu den in § 10 gefundenen Mechanismen. Hierzu kommt noch jedesmal ein Mechanismus vom Typus A_6.

Die Mechanismen sind in in Fig. 17, 18, 19, 20 angegeben.

§ 16.

Untersuchung des Falles: $e_{-1} \neq 0$, $f_{-1} = 0$, $g_{-1} = 0$.

Setzen wir die Entwicklungen in die Gleichungen IX′ ein, so ergibt die Vergleichung der Koeffizienten von $(\Theta_1 - \mu_1)^{-1}$ die Beziehungen:

$$a' = 1 - c'$$

$$d' = 1 - b'$$

$$e_{-1}\, s = a' \frac{\sqrt{q}}{2\,d}.$$

Die Entwicklungen um die Punkte $\Theta_1 = -\mu_1$ und $\Theta_1 = \mu_4$ ergeben nichts Wesentliches.

Da die Summe der Residuen nicht Null ist, so muß mindestens noch ein weiterer Unstetigkeitspunkt hinzutreten. Hierfür kommen nur die Stellen in Frage, wo $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_3$ verschwinden. Hieraus folgt:

$$\frac{1}{t_1} = -\frac{d\beta'}{a\alpha'}, \quad \frac{1}{t_2} = \frac{d(1-\alpha')}{b\alpha'}, \quad \frac{1}{t_3} = -\frac{d(1-\beta')}{c\alpha'}.$$

Setzen wir diese Werte in

$$at_1 + bt_2 + ct_3 + d = 0$$

ein, so erhalten wir die Beziehungen:

$$\left\{\begin{array}{l} a^2(1-a')(1-b') - b^2b'(1-b') \\ + c^2b'(1-a') - d^2\dfrac{(1-a')(1-b')b'}{a'} = 0. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} a^2(1-a')(1-\beta') - b^2\beta'(1-\beta') \\ + c^2\beta'(1-a') - d^2\dfrac{(1-a')(1-\beta')\beta'}{a'} = 0. \end{array}\right.$$

Auf Grund der Betrachtungen, die in § 11 uns zu den Beziehungen führten:

$$\frac{a'}{1-d'} = \frac{\alpha'}{1-\delta'}, \quad \frac{b'}{1-a'} = \frac{\beta'}{1-\alpha'}, \quad \frac{c'}{1-b'} = \frac{\gamma'}{1-\beta'}, \quad \frac{d'}{1-c'} = \frac{\delta'}{1-\gamma'}$$

gelangen wir zu den Relationen:

$$\frac{a'}{b'} = \frac{\alpha'}{\beta'}, \quad \frac{b'}{1-a'} = \frac{\beta'}{1-\alpha'}, \quad \frac{1-a'}{1-b'} = \frac{1-\alpha'}{1-\beta'}, \quad \frac{1-b'}{a'} = \frac{1-\beta'}{\alpha'}.$$

Diese Beziehungen und die Beziehungen

$$a' = 1-c', \qquad b' = 1-d'$$

können aber nur zusammen bestehen, wenn die vier Anschlußpunkte A, B, C, D auf den Seiten liegen. Von einem Mechanismus, Typus A_5, kann unter solchen Umständen nicht mehr die Rede sein, wir können höchstens einen Mechanismus vom Typus A_6 erwarten.

Um weitere Beziehungen für den Mechanismus zu gewinnen, wollen wir uns nun an die Bestimmung der Absolutglieder wenden. Die Vergleichung ergibt die Relationen:

a) bei der Entwicklung um $\Theta_1 = \mu_1$:

$$m^2(1-b') + r^2 b' = (1-b')\, b'(b^2 a' + d^2(1-a'))$$
$$n^2 a' + s^2(1-a') = (1-a')\, a'(a^2(1-b') + c^2 b'))$$

b) bei der Entwicklung um $\Theta_1 = -\mu_1$:

$$m^2(1-b') - n^2 a' = a'(1-b')(b^2 b' - a^2(1-a))$$
$$r^2 b' - s^2(1-a') = (1-a')\, b'(d^2(1-b') - c^2 a')$$

c) bei der Entwicklung um $\Theta_1 = \mu_4$:

$$m^2(1-b') - s^2(1-a') = (1-a')(1-b')\,\{d^2 b' - a^2 a'\}$$
$$n^2 a' - r^2 b' = a' b'\,\{c^2(1-a') - b^2(1-b')\}.$$

Auf Grund dieser Beziehungen lassen sich folgende gewinnen:

$$m^2 = \frac{a'}{1-b'}\, b'(1-a')c^2, \qquad n^2 = \frac{1-b'}{a'}\, b'(1-a')d^2$$

$$r^2 = \frac{1-a'}{b'} \cdot a'(1-b')a^2, \qquad s^2 = \frac{b'}{1-a'}\, a'(1-b')b^2$$

Führt man die Größen

$$\overline{MA},\ \overline{NA},\ \overline{NB},\ PB,\ \overline{PC},\ \overline{QC},\ \overline{QD}$$

ein, so nehmen die soeben gefundenen Beziehungen folgende Gestalt an:

$$m^2 = \frac{NB}{\overline{PB}}\, \overline{PC} \cdot \overline{QC}, \qquad n^2 = \frac{\overline{NA}}{\overline{MA}}\, \overline{QD} \cdot \overline{MD}$$

$$r^2 = \frac{PB}{\overline{NB}}\, MA \cdot NA, \qquad s^2 = \frac{MA}{\overline{NA}}\, NB \cdot PB.$$

Um die Größe x und die Größen u zu bestimmen, gehen wir genau so wie früher vor und finden:

$$u_1 = -\frac{t_2}{t_3}, \quad u_2 = t_2, \quad u_3 = -\frac{t_2}{t_1}, \quad \frac{1}{x} = \frac{s + m\frac{t_3}{t_2}}{\overline{MA}\,\frac{1}{t_1} + MD}.$$

Hiermit ist dieser Fall erledigt. Wir können folgendes Resultat aussprechen:

Resultat: Im Falle $e_{-1} \neq 0$, $f_{-1} = 0$, $g_{-1} = 0$ gibt es keinen übergeschlossenen Mechanismus vom Typus A_5, wohl aber existiert ein spezieller Mechanismus, Typus A_6. Für diesen gelten die Beziehungen:

$$a' = 1 - c', \qquad b' = 1 - d'.$$

$$a^2(1-a')(1-b') - b^2 b'(1-b')$$

$$+ c^2 b'(1-a') - d^2 \frac{(1-a')(1-b')b'}{a'} = 0.$$

$$m^2 = \frac{\overline{NB}}{\overline{PB}} \cdot PC\ QC, \qquad n^2 = \frac{\overline{NA}}{\overline{MA}}\ QD \cdot \overline{MD}$$

$$r^2 = \frac{\overline{PB}}{\overline{NB}}\ \overline{MA} \cdot \overline{NA}, \qquad s^2 = \frac{\overline{MA}}{\overline{NA}}\ \overline{NB} \cdot \overline{PB}$$

$$u_1 = -\frac{t_2}{t_3}, \quad u_2 = t_2, \quad u_3 = -\frac{t_2}{t_1}, \quad \frac{1}{x} = \frac{s + m\frac{t_3}{t_2}}{\overline{MA}\,\frac{1}{t_1} + \overline{MD}.}$$

Diesen Mechanismus gibt Krause im zweiten Fall seiner Betrachtungen an; er ist eingehend in geometrischer Hinsicht von Burmester in der früher erwähnten Zeitschrift untersucht worden und von letzterem mit dem Namen „Brennpunktsmechanismus“ belegt worden. Er ist in Fig. 21 angegeben.

§ 17.

Zusammenstellung der bis jetzt gefundenen wichtigsten Resultate.

Im ersten und zweiten Teile haben wir acht Fälle unterschieden. Hierunter ist einer: $e_{-1} = 0$, $f_{-1} = 0$, $g_{-1} = 0$, der überhaupt keinen übergeschlossenen Mechanismus liefert. In allen anderen drei Fällen, wo e_{-1} gleich Null ist, erhalten wir nur Mechanismen vom Typus A und A_4. Mechanismen vom Typus A_5 bez. A_6 treten hier nicht auf. In den Fällen $e_{-1} \neq 0$, $f_{-1} \neq 0$, $g_{-1} \neq 0$ und $e_{-1} \neq 0$, $f_{-1} = 0$, $g_{-1} = 0$ dagegen finden wir außer Gelenksystemen vom Typus A und A_4 auch solche vom Typus A_6. Endlich liefern die Fälle $e_{-1} \neq 0$, $f_{-1} \neq 0$, $g_{-1} = 0$ und $e_{-1} \neq 0$, $f_{-1} = 0$, $g_{-1} \neq 0$ außer Mechanismen

vom Typus A und A_4 auch solche vom Typus A_5 und A_6. Gelenksysteme vom Typus A_1, A_2, A_3 gibt es überhaupt nicht.

Hiermit sind die Gelenksysteme, die dem Typus A entsprechen oder aus ihm durch Spezialisation folgen, vollständig erledigt. Im folgenden werden wir uns mit einfacheren übergeschlossenen Gelenksystemen beschäftigen. Von den bis jetzt betrachteten sind sie aber nicht unabhängig. Sie bilden gewissermaßen die Elemente; aus ihnen kann man sämtliche bis jetzt gefundenen Mechanismen zusammensetzen.

III. Teil.

§ 18.

Untersuchung des dritten Problemes.

Bei der Betrachtung des mit Typus C bezeichneten Gelenksystemes gehen wir genau so vor, wie es in den beiden ersten Teilen geschen ist. Die Seiten des Gelenkviereckes $MNPQ$ sind wieder a, b, c, d; die Winkel, die diese gegen eine feste Gerade bilden: ω_1', ω_2', ω_3', ω_4'. Hierzu definieren wir Größen:

$$t_1' = e^{i\omega_1'}, \quad t_2' = e^{i\omega_2'}, \quad t_3' = e^{i\omega_3'}, \quad t_4' = e^{i\omega_4'}.$$

Die Seiten AB, BD, und EC wollen wir mit e, f, g bezeichnen; die Winkel, die diese gegen dieselbe feste Gerade bilden, seien ω_5', ω_6', ω_7'. Hierzu gehören die Größen:

$$t_5' = e^{i\omega_5'}, \qquad t_6' = e^{i\omega_6'}, \qquad t_7' = e^{i\omega_7'}.$$

Dann können wir folgende Beziehungen aufstellen. Für das Viereck $MNPQ$ gelten die Relationen:

$$\text{I.} \begin{cases} a t_1' + b t_2' + c t_3' + d t_4' = 0 \\ \dfrac{a}{t_1'} + \dfrac{b}{t_2'} + \dfrac{c}{t_3'} + \dfrac{d}{t_4'} = 0. \end{cases}$$

Für das Viereck $ABDM$ gilt:

$$\text{II.} \begin{cases} a\alpha' t_1' + e t_5' + f t_6' + d(1-\delta') t_4' = 0 \\ \dfrac{a\alpha'}{t_1'} + \dfrac{e}{t_5'} + \dfrac{f}{t_6'} + d(1-\delta')\dfrac{1}{t_4'} = 0. \end{cases}$$

Für das Viereck $DECQ$ gilt:

$$\text{III.} \begin{cases} -f(1-f')\, t_6' + g t_7' + c(1-c')\, t_3' + d d' t_4' = 0 \\ -f(1-\varphi')\dfrac{1}{t_6'} + g\dfrac{1}{t_7'} + c(1-\gamma')\dfrac{1}{t_3'} + d\delta'\dfrac{1}{t_4'} = 0. \end{cases}$$

Wir wollen folgende Größen einführen:

$$\frac{t_1'}{t_4'} = t_1, \quad \frac{t_2'}{t_4'} = t_2, \quad \frac{t_3'}{t_4'} = t_3, \quad \frac{t_5'}{t_4'} = t_5, \quad \frac{t_6'}{t_4'} = t_6 = \frac{1}{x}, \quad \frac{t_7'}{t_4'} = t_7.$$

Dann kann man die obigen Gleichungen in folgender Weise schreiben:

$$\text{I.} \begin{cases} a t_1 + b t_2 + c t_3 + d = 0 \\ \frac{a}{t_1} + \frac{b}{t_2} + \frac{c}{t_3} + d = 0 \end{cases}$$

$$\text{II.} \begin{cases} e t_5 = - T_1 - f \frac{1}{x} \\ e \frac{1}{t_5} = - \mathfrak{T}_1 - f x \end{cases}$$

$$\text{III.} \begin{cases} g t_7 = - T_3 + f(1 - f') \frac{1}{x} \\ \frac{g}{t_7} = - \mathfrak{T}_3 + f(1 - \varphi') x. \end{cases}$$

Hierbei bedeutet:

$$T_1 = a a' t_1 + d(1 - d'), \quad \mathfrak{T}_1 = a a' \frac{1}{t_1} + d(1 - \delta')$$

$$T_3 = c(1 - c') t_3 + d d'), \quad \mathfrak{T}_3 = c(1 - \gamma') \frac{1}{t_3} + d\delta'.$$

Die Gleichungen II und III ergeben die beiden weiteren:

$$\text{IV.} \begin{cases} x f T_1 + \frac{1}{x} f \mathfrak{T}_1 = e^2 - f^2 - T_1 \mathfrak{T}_1 \\ x f(1 - \varphi') T_3 + \frac{1}{x} f(1 - f') \mathfrak{T}_3 = f^2 (1 - f')(1 - \varphi') - g^2 + T_3 \mathfrak{T}_3. \end{cases}$$

Die Aufgabe lautet nun ganz entsprechend den früheren: Es sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür aufzustellen, daß das Gleichungssystem IV für unendlich viele Werte von Θ_1 besteht.

Zu diesem Zwecke gehen wir genau so wie früher vor, und wir gelangen wieder zu acht und nur acht Fällen. Wir setzen:

$$\frac{1}{x} = \frac{e_{-1}}{\Theta_1 - \mu_1} + e_0 + \ldots$$

$$\frac{1}{x} = \frac{f_{-1}}{\Theta_1 - \mu_1} + f_0 + \ldots$$

$$\frac{1}{x} = \frac{g_{-1}}{\Theta_1 - \mu_1} + g_0 + \ldots$$

Dann kann sein:

1. Die drei Größen e_{-1}, f_{-1}, g_{-1} sämtlich von Null verschieden.

2. Die drei Größen sämtlich gleich Null.

3. Eine der drei Größen ist gleich Null, die anderen zwei von Null verschieden.

4. Zwei der Größen sind gleich Null, die andere von Null verschieden.

Wir entwickeln nun die linken und rechten Seiten der 2 Gleichungen um die drei Punkte $\Theta_1 = \mu_1$, $\Theta_1 = -\mu_1$, $\Theta_1 = \mu_4$ und setzen die Koeffizienten der neg. Potenzen, als auch die konst. Glieder gleich Null.

§ 19.

Untersuchung des Falles: $e_{-1} \neq 0$, $f_{-1} \neq 0$, $g_{-1} \neq 0$.

Vergleichen wir die Koeffizienten von $(\Theta_1 - \mu_1)^{-1}$, so erhalten wir folgende Beziehungen:

$$e_{-1} f = -\frac{1}{2}\sqrt{q}\, a',$$

$$1 - f' = \frac{1-c}{a'}.$$

Für die Koeffizienten von $(\Theta_1 + \mu_1)^{-1}$ bestehen die Gleichungen:

$$f_{-1} \cdot f = a' \frac{1}{2}\sqrt{q}$$

$$1 - c' = d'.$$

Die Entwicklung um $\Theta_1 = \mu_4$ ergibt:

$$a' = 1 - d'$$

$$g_{-1} f (1 - f') = (1 - c') \frac{1}{2}\sqrt{q}.$$

Wir erhalten das Resultat:

Ist $e_{-1} \neq 0$, $f_{-1} \neq 0$, $g_{-1} \neq 0$, dann müssen die Beziehungen bestehen: $a' = c' = 1 - d'$, $\quad 1 - f' = \frac{1-c'}{a'}$.

Da die Summe der Residuen nicht Null ist, so muß mindestens noch ein weiterer Unstetigkeitspunkt auftreten.

Hierfür kommen nur die Stellen in Betracht, wo die Koeffizienten von $\frac{1}{x^2}$ der Gleichungen IV Null werden. Es muß sein:

$$\mathfrak{T}_1 = 0, \qquad \mathfrak{T}_3 = 0.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{1}{t_1} = -\frac{d}{a}, \qquad \frac{1}{t_3} = -\frac{d}{c}.$$

Aus den Gleichungen I folgt durch Elimination von t_2:

$$ad\left\{t_1 + \frac{1}{t_1}\right\} + ac\left\{\frac{t_1}{t_3} + \frac{t_3}{t_1}\right\} + cd\left\{t_3 + \frac{1}{t_3}\right\} + a^2 + c^2 + d^2 - b^2 = 0.$$

Setzen wir die soeben gefundenen Werte von t_1 und t_3 hier ein, so erhalten wir:

$$1.\quad a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 0.$$

Nun haben wir die Absolutglieder in den Entwicklungen zu bestimmen. Die Vergleichung derselben ergibt die Beziehungen:

a) Bei der Entwicklung um $\Theta_1 = \mu_1$:

$$2.\quad \frac{e^2}{\alpha'\alpha'} + \frac{g^2}{(1-\alpha')(1-\alpha')} = b^2 + d^2.$$

b) Bei der Entwicklung um $\Theta_1 = -\mu_1$:

$$3.\quad \frac{f^2}{\alpha'\alpha'} - \frac{g^2}{(1-\alpha')(1-\alpha')} = a^2 - b^2.$$

c) Bei der Entwicklung um $\Theta_1 = \mu_4$:

$$4.\quad \frac{e^2}{\alpha'\alpha'} - \frac{f^2}{\alpha'\alpha'} = b^2 - c^2.$$

Aus diesen vier Relationen folgt:

$$e^2 = a^2\alpha'\alpha', \qquad f^2 = d^2\alpha'\alpha', \qquad g^2 = c^2(1-\alpha')(1-\alpha').$$

Hiernach haben wir noch die Größen $\frac{1}{x} = t_6$, t_5 und t_7 zu bestimmen. Aus den Gleichungen IV können wir $\frac{1}{x}$ leicht berechnen. Zwar ist jede der Gleichungen in $\frac{1}{x}$ quadratisch, doch von den zwei Wurzeln der Gleichung können wir jedesmal nur eine gebrauchen, denn nur eine genügt den vorgeschriebenen Bedingungen. Infolge dessen ist $\frac{1}{x}$ eindeutig bestimmt. Aus der ersten Gleichung erhalten wir:

$$t_6 = \frac{1}{x} = -\frac{a t_1 + d}{\frac{a}{t_1} + d} \cdot \frac{d}{f} a' = -\sqrt{\frac{a'}{\alpha'}} \frac{a t_1 + d}{\frac{a}{t_1} + d},$$

aus der zweiten Gleichung erhalten wir:

$$t_6 = \frac{1}{x} = \frac{d}{f} a' \frac{c t_3 + d}{\frac{c}{t_3} + d} = \sqrt{\frac{a'}{\alpha'}} \frac{c t_3 + d}{\frac{c}{t_3} + d}.$$

Setzt man diese Worte ein in:

$$e t_5 = -a a' t_1 - d(1 - d') - f t_6$$

$$g t_7 = -c(1 - c') t_3 - d d' + f(1 - f') t_6$$

so findet man:

$$t_5 = -\frac{a}{e} \frac{a'}{t_1} \frac{a t_1 + d}{\frac{a}{t_1} + d} = -\sqrt{\frac{a'}{\alpha'}} \cdot \frac{a t_1 + d}{\frac{a}{t_1} + d} \frac{1}{t_1} = \frac{t_6}{t_1}.$$

$$t_7 = -\frac{c}{g} \frac{1 - c'}{t_3} \frac{c t_3 + d}{\frac{c}{t_3} + d} = -\sqrt{\frac{1 - c'}{1 - \gamma'}} \frac{c t_3 + d}{\frac{c}{t_3} + d} \frac{1}{t_3} = -\frac{t_6}{t_3} \sqrt{\frac{(1 - a')\alpha'}{(1 - \alpha')a'}}$$

Zu diesen Formeln ist zu bemerken, daß die Quadratwurzeln eindeutig bestimmte Größen sind. Diese Bemerkung gilt auch für die weiteren Untersuchungen.

Hiermit haben wir die notwendigen und hinreichenden Bedingungen aufgestellt. Wir können das Resultat aussprechen:

Resultat: Im Falle: $e_{-1} \neq 0$, $f_{-1} \neq 0$, $g_{-1} \neq 0$ gibt es einen übergeschlossenen Mechanismus; für ihn bestehen die Beziehungen:

$$a' = 1 - d' = c'. \qquad 1 - f' = \frac{1 - c'}{d'}.$$

$$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 0.$$

$$e^2 = a^2 a' \alpha', \quad f^2 = d^2(1 - d')(1 - \delta'), \quad g^2 = c^2(1 - c')(1 - \gamma')$$

$$t_6 = \frac{1}{x} = -\sqrt{\frac{a'}{\alpha'}} \frac{a t_1 + d}{a \frac{1}{t_1} + d}, \quad t_5 = \frac{t_6}{t_1}, \quad t_7 = -\frac{t_6}{t_3} \sqrt{\frac{1 - a'}{1 - \alpha'} \frac{\alpha'}{a'}}.$$

Dieser Fall ist von Bolduan als Fall C behandelt worden. Der Mechanismus steht in engem Zusammenhange mit den früher

in dem Falle $e_{-1} \neq 0$, $f_{-1} \neq 0$, $g_{-1} \neq 0$ gefundenen Mechanismen, er bildet gewissermaßen einen Teil derselben. Hierauf macht schon Bolduau aufmerksam. Der Mechanismus ist in Fig. 22 angegeben.

§ 20.

Untersuchung des Falles: $e_{-1} = 0$, $f_{-1} = 0$, $g_{-1} = 0$.

Die Entwicklungen um $\Theta_1 = \mu_1$ ergeben folgende Gleichungen:

$$\frac{1}{e_0} f = -d(1-\delta')$$

$$\frac{1}{e_0} f = d\frac{\delta'}{1-\varphi'}.$$

Hieraus folgt:

$$1 - f' = -\frac{d'}{1-d'}.$$

Die Vergleichung der Koeffizienten von $(\Theta_1 + \mu_1)^{-1}$ ergibt:

$$\frac{f}{f_0} = -d(1-\delta')$$

und die Vergleichung der Koeffizienten von $(\Theta_1 - \mu_4)^{-1}$:

$$f\frac{(1-\varphi')}{g_0} = d\delta'.$$

Da die Summe der Residuen Null ist, so braucht kein weiterer Unendlichkeitspunkt hinzuzutreten. Daß dies auch tatsächlich der Fall ist, wird die Berechnung von $\frac{1}{x}$ lehren. Wir wollen jetzt aber zunächst die Absolutglieder in den Entwicklungen bestimmen. Die Vergleichung ergibt die Resultate:

a) bei der Entwicklung um $\Theta_1 = \mu_1$:

$$\frac{g^2}{1-c'}\frac{1-\delta'}{\delta'} + \frac{e^2}{a'} = a^2 a' + c^2\frac{1-\gamma'}{\delta'}(1-\delta')$$

b) bei der Entwicklung um $\Theta_1 = -\mu_1$:

$$\frac{g^2}{1-c'}\frac{1-\delta'}{\delta'} - \frac{f^2}{1-d'} = c^2\frac{1-\delta'}{\delta'}(1-\gamma') - d^2(1-\delta')$$

c) bei der Entwicklung um $\Theta_1 = \mu_4$:

$$\frac{e^2}{a'} - \frac{f^2}{1-d'} = a^2 a' - d^2(1-d').$$

Aus diesen drei Beziehungen folgt:

$$e^2 = a^2 a' \alpha', \quad f^2 = d^2(1-d')(1-\delta'), \quad g^2 = c^2(1-c')(1-\gamma').$$

Die Bestimmung der Größen t_6, t_5, t_7 ergibt die Werte:

$$t_6 = -\sqrt{\frac{1-d'}{1-\delta'}}, \quad t_5 = -\sqrt{\frac{a'}{\alpha'}}, \quad t_7 = -\sqrt{\frac{1-c'}{1-\gamma'}}\, t_8.$$

Wir haben das Resultat gefunden:

Ist $e_{-1} = 0$, $f_{-1} = 0$, $g_{-1} = 0$, dann finden wir einen Mechanismus, für den die Beziehungen bestehen:

$$1 - f' = -\frac{d'}{1-d'},$$

$$e^2 = a^2 a' \alpha', \quad f^2 = d^2(1-d')(1-\delta'), \quad g^2 = c^2(1-c')(1-\gamma'')$$

$$t_5 = -\sqrt{\frac{a'}{\alpha'}}\, t_1, \quad t_6 = -\sqrt{\frac{1-d'}{1-\delta'}}, \quad t_7 = -\sqrt{\frac{1-c'}{1-\gamma'}}\, t_8.$$

Diese Beziehungen bedingen, daß e auf MA, f auf MD, g auf QC zu liegen kommen. Dann ist das Resultat selbstverständlich, und von einem übergeschlossenen Mechanismus kann nicht mehr die Rede sein.

§ 21.

Untersuchung der Fälle: A. $e_{-1} = 0$, $f_{-1} = 0$, $g_{-1} \neq 0$
B. $e_{-1} = 0$, $f_{-1} \neq 0$, $g_{-1} = 0$.

A. Untersuchung des Falles: $e_{-1} = 0$, $f_{-1} = 0$, $g_{-1} \neq 0$.

Die Vergleichung der Koeffizienten von $(\Theta_1 - \mu_1)^{-1}$ ergibt folgende Beziehung:

$$1 - f' = -\frac{d'}{1-d'}.$$

Die Entwicklung um $\Theta_1 = -\mu_1$ ergibt nichts Wesentliches, wohl aber die um $\Theta_1 = \mu_4$. Wir finden bei der Vergleichung der Koeffizienten von $(\Theta_1 - \mu_4)^{-1}$:

$$a' = 1 - d'$$

$$g_{-1} f = \frac{\sqrt{q}}{2 d} \sqrt{1-c'}\sqrt{1-f'}.$$

Da die Summe der Residuen nicht Null ist, so muß mindestens noch ein zweiter Unstetigkeitspunkt hinzukommen. Hierfür kommen nur die Stellen in Betracht, wo die Koeffizienten $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_3$ der Gleichungen IV verschwinden. Hieraus folgt:

$$\frac{1}{t_1} = -\frac{d}{a}, \qquad \frac{1}{t_3} = -\frac{d}{c}\frac{\delta'}{1-\gamma'}.$$

Setzt man diese Werte in die schon in § 19 angegebene Gleichung ein:

$$ad\left(t_1 + \frac{1}{t_1}\right) + ac\left(\frac{t_1}{t_3} + \frac{t_3}{t_1}\right) + cd\left(t_3 + \frac{1}{t_3}\right) + a^2 + c^2 + d^2 - b^2 = 0$$

so erhält man die Beziehung:

$$(a^2 - d^2)(1-\alpha') + (c^2 - b^2)(1-\gamma') = 0.$$

Außer dieser Gleichung muß noch die zu dieser konj. komplexe Gleichung bestehen:

$$(a^2 - d^2)(1-\alpha') + (c^2 - b^2)(1-c') = 0.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{1-\alpha'}{1-\alpha'} = \frac{1-c'}{1-\gamma'}.$$

Die weiteren Beziehungen erhalten wir, wenn wir die Absolutglieder in den betreffenden Entwicklungen gleich Null setzen. Bei der Entwicklung um $\Theta_1 = \mu_1$ erhalten wir:

$$e^2 + g^2 \frac{a'\alpha'}{(1-c')(1-\alpha')} = a'\alpha'\left(a^2 + c^2\frac{1-\gamma'}{1-\alpha'}\right).$$

Bei der Entwicklung um $\Theta_1 = -\mu_1$ finden wir:

$$f^2 - g^2 \frac{a'\alpha'}{(1-c')(1-\alpha')} = a'\alpha'\left\{d^2 - c^2\frac{1-\gamma'}{1-\alpha'}\right\}.$$

Die Entwicklung um $\Theta_1 = \mu_4$ ergibt:

$$e^2 - f^2 = (c^2 - b^2)\,a'\alpha'\frac{1-c'}{1-\alpha'}.$$

Hieraus erhalten wir die Relationen:

$$e^2 = d^2(1-d')(1-\delta'), \quad f^2 = a^2a'\alpha', \quad g^2 = b^2(1-c')(1-\gamma').$$

Die Bestimmung von $\frac{1}{x} = t_6$ erfolgt aus der ersten der Gleichungen IV; man erhält:

$$t_6 = -\sqrt{\frac{a'}{\alpha'}}\,\frac{a t_1 + d}{\frac{a}{t_1} + d}\,\frac{1}{t_1} = -\frac{a}{f}\,a'\,\frac{a t_1 + d}{\frac{a}{t_1} + d}\,\frac{1}{t_1}.$$

Kennen wir t_6, so können wir auch t_5 und t_7 berechnen; wir finden:

$$t_5 = t_1 t_6, \quad t_7 = \sqrt{\frac{1-a'}{1-\alpha'}\,\frac{\alpha'}{a'}}\,\frac{t_1 t_6}{t_2}.$$

Hiermit haben wir die notwendigen und hinreichenden Beziehungen gefunden. Wir können folgendes Resultat aussprechen:

Im Falle $e_{-1} = 0$, $f_{-1} = 0$, $g_{-1} \neq 0$ gibt es einen übergeschlossenen Mechanismus; für ihn gelten die Beziehungen:

$$a' = 1 - d', \quad 1 - f' = -\frac{d'}{1-d'}, \quad \frac{1-c'}{1-\gamma'} = \frac{d'}{\delta'}.$$

$$(a^2 - d^2)\,d' - (b^2 - c^2)(1 - c') = 0.$$

$$e^2 = d^2(1-d')(1-\delta'), \quad f^2 = a^2 a'\alpha', \quad g^2 = b^2(1-c')(1-\gamma').$$

$$t_5 = t_1 t_6, \quad t_6 = -\sqrt{\frac{a'}{\alpha'}}\,\frac{a t_1 + d}{\frac{a}{t_1} + d}\,\frac{1}{t_1}, \quad t_7 = \sqrt{\frac{1-a'}{1-\alpha'}\,\frac{\alpha'}{a'}}\,\frac{t_1 t_6}{t_2}.$$

Dieser Mechanismus ist von Bolduan in Fall D behandelt worden.

B. Untersuchung des Falles: $e_{-1} = 0$, $f_{-1} \neq 0$, $g_{-1} = 0$.

In engem Zusammenhange mit dem soeben behandelten Falle steht der Fall $e_{-1} = 0$, $f_{-1} \neq 0$, $g_{-1} = 0$. Der Mechanismus, der sich hier ergibt, bildet die notwendige Ergänzung zu dem vorher behandelten. Es ist infolgedessen berechtigt, wenn wir nur das Resultat angeben:

Im Falle $e_{-1} = 0$, $f_{-1} \neq 0$, $g_{-1} = 0$ gibt es einen übergeschlossenen Mechanismus, wenn die Beziehungen bestehen:

$$1 - d' = c', \quad 1 - f' = -\frac{d'}{1-d'}, \quad \frac{a'}{1-d'} = \frac{\alpha'}{1-\delta'}$$

$$(a^2 - b^2)a' + (c^2 - d^2)(1 - d') = 0.$$

$$e^2 = b^2 a' \alpha', \quad f^2 = c^2 c' \gamma', \quad g^2 = d^2 d' \delta'.$$

$$t_5 = \frac{t_3 t_6}{t_2}, \quad t_6 = -\sqrt{\frac{1-\delta'}{1-\delta'}} \frac{\frac{c t_3 + d}{c}}{t_3 + d} \frac{1}{t_3}, \quad t_7 = \sqrt{\frac{d'(1-\delta')}{\delta'(1-d')}}\, t_3 t_6.$$

Dieser Mechanismus ist von Bolduan in Fall *B*, 1. Unterfall behandelt worden.

Diese Mechanismen stehen in engem Zusammenhange mit den früher in den Fällen $e_{-1} = 0$, $f_{-1} = 0$, $g_{-1} \neq 0$ und $e_{-1} = 0$, $f_{-1} \neq 0$, $g_{-1} = 0$ gefundenen Mechanismen. In Fig. 23 und 24 sind sie angegeben.

§ 22.

Untersuchung des Falles: $e_{-1} = 0$, $f_{-1} \neq 0$, $g_{-1} \neq 0$.

Die Vergleichung der Koeffizienten von $(\Theta_1 - \mu_1)^{-1}$ ergibt:

$$1 - f' = -\frac{d'}{1-d'}.$$

Vergleichen wir die Koeffizienten von $(\Theta_1 + \mu_1)^{-1}$, so erhalten wir die Beziehungen:

$$f_{-1} \cdot f = \frac{\sqrt{q}}{2d} a'$$

$$d' = 1 - c'.$$

Endlich ergibt die Entwicklung um $\Theta_1 = \mu_4$ die Beziehungen:

$$a' = 1 - d'.$$

$$f(1-f')g_{-1} = \frac{1 - c'\sqrt{q}}{2d}.$$

Wir haben bis jetzt gefunden:

$$a' = c' = 1 - d', \qquad 1 - f' = -\frac{d'}{1-d'}.$$

Da die Summe der Residuen Null ist, so braucht kein weiterer Unendlichkeitspunkt hinzuzutreten. Daß dies tatsächlich der Fall ist, wird die Bestimmung von $\frac{1}{x}$ lehren. Wir wenden uns zunächst an die Vergleichung der Absolutglieder in den einzelnen Entwicklungen. Die Entwicklung um $\Theta_1 = \mu_1$ ergibt:

$$e^2(1-a')(1-\alpha') + g^2 a' \alpha' = (a^2 + c^2) a' \alpha' (1-a')(1-\alpha').$$

Die Entwicklung um $\Theta_1 = -\mu_1$ ergibt:

$$f^2(1-a')(1-\alpha') - g^2 a' \alpha' = (b^2 - a^2) a' \alpha' (1-a')(1-\alpha').$$

Bei der Entwicklung um $\Theta_1 = \mu_4$ finden wir:

$$e^2 - f^2 = a' \alpha' (c^2 - b^2).$$

Aus diesen Beziehungen folgen die Relationen:

$$e^2 = c^2 c' \gamma', \quad f^2 = b^2 a' \alpha', \quad g^2 = a^2 (1 - a')(1 - \alpha').$$

Die Bestimmung von $\frac{1}{x}$ aus der ersten der Gleichungen IV ergibt:

$$\frac{1}{x} = t_6 = \sqrt{\frac{a'}{\alpha'}}\, t_2.$$

Dann können wir auch t_5 und t_7 berechnen, wir erhalten:

$$t_5 = \sqrt{\frac{a'}{\alpha'}}\, t_3, \quad t_7 = \sqrt{\frac{1 - a'}{1 - \alpha'}}\, t_1.$$

Hiermit haben wir sämtliche Bedingungen gefunden, und wir können folgendes Resultat aussprechen:

Im Falle $e_{-1} = 0$, $f_{-1} \neq 0$, $g_{-1} \neq 0$ gibt es einen übergeschlossenen Mechanismus, für den die Beziehungen bestehen:

$$a' = c' = 1 - d', \quad 1 - f' = -\frac{d'}{1 - d'}.$$

$$e^2 = c^2 c' \gamma', \quad f^2 = b^2 a' d', \quad g^2 = a^2 (1 - a')(1 - \alpha').$$

$$t_5 = \sqrt{\frac{a'}{\alpha'}}\, t_3, \quad t_6 = \sqrt{\frac{a'}{\alpha'}}\, t_2, \quad t_7 = \sqrt{\frac{1 - a'}{1 - \alpha'}}\, t_1.$$

Dieser Fall ist von Bolduan als zweiter Unterfall des Falles B behandelt worden. Der Mechanismus steht in engem Zusammenhange mit den früher im Falle $e_{-1} = 0$, $f_{-1} \neq 0$, $g_{-1} \neq 0$ gefundenen Mechanismen; er ist in Fig. 25 angegeben.

§ 23.

Untersuchung der Fälle: A. $e_{-1} \neq 0$, $f_{-1} \neq 0$, $g_{-1} = 0$,
B. $e_{-1} \neq 0$, $f_{-1} = 0$, $g_{-1} \neq 0$.

A. Untersuchung des Falles: $e_{-1} \neq 0$, $f_{-1} \neq 0$, $g_{-1} = 0$.
Die Vergleichung der Koeffizienten von $(\Theta_1 - \mu_1)^{-1}$ ergibt:

$$e_{-1} f = -\frac{\sqrt{q}}{2d}\, a'$$

$$1 - f' = \frac{1 - c'}{a'}.$$

Die Entwicklung um $\Theta_1 = -\mu_1$ ergibt:

$$f_{-1} \cdot f = a' \frac{\sqrt{q}}{2d} \cdot$$

$$1 - c' = d'.$$

Die Entwicklung um $\Theta_1 = \mu_4$ ergibt nur:

$$\frac{f}{g_0} = d a'.$$

Da die Summe der Residuen Null ist, so braucht kein weiterer Unendlichkeitspunkt hinzuzutreten. Daß auch tatsächlich kein weiterer hinzutritt, wird die spätere Berechnung von $\frac{1}{x}$ lehren. Wir wollen uns aber zunächst an die Vergleichung der Absolutglieder in den einzelnen Entwicklungen wenden.

Bei der Entwicklung um $\Theta_1 = \mu_1$ erhalten wir:

$$\frac{e^2}{1-\delta'} + \frac{g^2}{\delta'} \frac{a'}{d'} = d^2(1-d') + b^2 a'.$$

Bei der Entwicklung um $\Theta_1 = -\mu_1$ finden wir:

$$\frac{f^2}{a' \alpha'} - \frac{g^2}{(1-c')(1-\gamma')} = a^2 - b^2.$$

Endlich ergibt die Entwicklung um $\Theta_1 = \mu_4$:

$$\frac{e^2}{1-\delta'} - \frac{f^2}{\alpha'} = d^2(1-d') - a^2 a'.$$

Hieraus folgen die Relationen:

$$f^2 = a^2 a' \alpha', \qquad g^2 = b^2 d' \delta', \qquad e^2 = d^2(1-d')(1-\delta').$$

Die Beziehungen für t_6, t_5, und t_7 ergeben sich auch leicht. Aus der ersten der Gleichungen IV folgt:

$$\frac{1}{x} = t_6 = -\sqrt{\frac{a'}{\alpha'}}\, t_1 = -\frac{a a'}{f}\, t_1.$$

Dann erhalten wir weiter:

$$t_5 = -\frac{d}{e}(1-d') = -\sqrt{\frac{1-d'}{1-\delta'}}.$$

$$t_7 = \frac{b}{g} d' t_2 = \sqrt{\frac{d'}{\delta'}}\, t_2.$$

Hiermit haben wir das Resultat gefunden:

Ist $e_{-1} \neq 0$, $f_{-1} \neq 0$, $g_{-1} = 0$, so gibt es einen übergeschlossenen Mechanismus, für den die Beziehungen bestehen:

$$1 - c' = d', \qquad 1 - f' = \frac{1-c'}{a'}$$

$$e^2 = d^2(1-d')(1-\delta'), \qquad f^2 = a^2 a' \alpha', \qquad g^2 = b^2 d' \delta'.$$

$$t_5 = -\sqrt{\frac{1-d'}{1-\delta'}}, \qquad t_6 = -\sqrt{\frac{a'}{\alpha'}}\, t_1, \qquad t_7 = \sqrt{\frac{d'}{\delta'}}\, t_2.$$

Dieser Fall entspricht dem Fall E der Arbeit Bolduans.

B. Untersuchung des Falles: $e_{-1} \neq 0$, $f_{-1} = 0$, $g_{-1} \neq 0$.

In engem Zusammenhange mit dem soeben behandelten Falle steht der Fall $e_{-1} \neq 0$, $f_{-1} = 0$, $g_{-1} \neq 0$. Der Mechanismus, der sich ergibt, bildet die notwendige Ergänzung zu dem im vorigen Falle erhaltenen Mechanismus. Wir beschränken uns deshalb darauf, nur das Resultat anzugeben.

Resultat. Im Falle $e_{-1} \neq 0$, $f_{-1} = 0$, $g_{-1} \neq 0$ gibt es einen übergeschlossenen Mechanismus, für den die Beziehungen bestehen:

$$a' = 1 - d', \quad 1 - f' = \frac{1-c'}{a'}.$$

$$e^2 = b^2 a' \alpha', \quad f^2 = c^2 a' \alpha', \quad g^2 = d^2 d' \delta'.$$

$$t_5 = \sqrt{\frac{a'}{\alpha'}}\, t_2. \quad t_6 = \sqrt{\frac{a'}{\alpha'}}\, t_3. \quad t_7 = -\sqrt{\frac{d'}{\delta'}}.$$

Die Mechanismen, die wir in diesen beiden Fällen erhalten, stehen im engen Zusammenhange mit den früher in den entsprechenden Fällen gefundenen Mechanismen. Sie sind in Fig. 26 und 27 angegeben.

§ 24.

Untersuchung des Falles: $e_{-1} \neq 0$, $f_{-1} = 0$, $g_{-1} = 0$.

Die Vergleichung der Koeffizienten von $(\Theta_1 - \mu_1)^{-1}$ in den einzelnen Entwicklungen ergibt:

$$\frac{1}{2d}\,\alpha'$$

$$\frac{1-c'}{\alpha'}.$$

Die Entwicklungen um $\Theta_1 = -\mu_1$ und $\Theta_1 = \mu_4$ ergeben nichts Wesentliches.

Da die Summe der Residuen nicht Null ist, so muß mindestens noch ein weiterer Unendlichkeitspunkt hinzukommen. Hierfür kommen nur die Stellen in Frage, wo die Koeffizienten $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_3$ der Gleichungen IV verschwinden. Hieraus folgt:

$$\frac{1}{t_1} = -\frac{d(1-\delta')}{\alpha'\alpha'}, \quad \frac{1}{t_3} = -\frac{d\delta'}{c(1-\gamma')}.$$

Setzt man diese Werte in die Beziehung:

$$ad\left(t_1 - \frac{1}{t_1}\right) + bc\left(\frac{t_1}{t_3} + \frac{t_3}{t_1}\right) + cd\left(t_3 + \frac{1}{t_3}\right) + a^2 + c^2 + d^2 - b^2 = 0$$

ein, so erhält man nach einigen Umformungen die Relation:

$$\left(a^2 \frac{\alpha'\delta'}{1-\gamma'(1-\delta')} - c^2 - d^2 \frac{\delta'}{1-\gamma'}\right)\mathfrak{M} - b^2 = 0.$$

Zugleich gilt dann auch die hierzu konj. kompl. Größe:

$$\left(a^2 \frac{\alpha'\delta'}{(1-c')(1-\delta')} + c^2 - d^2 \frac{\delta'}{1-c'}\right) M - b^2 = 0.$$

Es bedeutet:

$$M = \frac{1-c'(1-\delta')}{\alpha'\delta'} - \frac{1-c'}{\delta'} + 1.$$

$$\mathfrak{M} = \frac{(1-\gamma')(1-\delta')}{\alpha'\delta'} - \frac{1-\gamma'}{\delta'} + 1.$$

Auf Grund analoger Betrachtungen, die uns in § 11 zu den Beziehungen führten:

$$\frac{\alpha'}{1-\delta'} = \frac{\alpha'}{1-\delta'}, \quad \frac{b'}{1-c'} = \frac{\beta'}{1-\gamma'}, \quad \frac{c'}{1-b'} = \frac{\gamma'}{1-\beta'}, \quad \frac{d'}{1-c'} = \frac{\delta'}{1-\gamma'}$$

gelangen wir hier zu den Relationen:

$$\frac{\alpha'}{1-\delta'} = \frac{\alpha'}{1-\delta'}, \quad \frac{d'}{1-c'} = \frac{\delta'}{1-\gamma'}.$$

Weitere Beziehungen erhalten wir, wenn wir die Absolutglieder in den einzelnen Entwicklungen betrachten. Wir erhalten die Beziehungen

a) bei der Entwicklung um $\Theta_1 = \mu_1$:

$$e^2 - g^2 \frac{a'(1-\delta')}{\delta'(1-c')} = a'(1-\delta')\left\{ M d^2 \frac{d'}{1-c'} + b^2 \right\}$$

b) bei der Entwicklung um $\Theta_1 = -\mu_1$:

$$g^2 - f^2 \frac{(1-c')\delta'}{a'(1-\delta')} M = (1-c')\delta' \left\{ d^2 \frac{d'}{1-c'} - c^2 \right\} M$$

c) bei der Entwicklung um $\Theta_1 = \mu_4$:

$$f^2 M - e^2 = M a'(1-\delta') \left\{ a^2 \frac{a'}{1-d'} \frac{\delta'}{1-\gamma'} - d^2 \frac{\delta'}{1-\gamma'} \right\}$$

Aus diesen Beziehungen folgt:

$$e^2 = M c^2 a'(1-\delta'), \quad f^2 = \frac{1}{M} b^2 a'(1-\delta')$$

$$g^2 = M a^2 d' \delta' \frac{a'}{1-d'}.$$

Die Bestimmung von $\frac{1}{x}$ geschieht in derselben Weise wie in den früheren Fällen. Aus der ersten Gleichung des Systems IV folgt:

$$\frac{1}{x} = t_6 = -\frac{a'(1-\delta')}{f\left(a \frac{a'}{t_1} + d(1-\delta')\right)} \left(c\, t_3 + \frac{b}{M} t_2 \right) \frac{b}{t_2},$$

und aus der zweiten Gleichung folgt:

$$\frac{1}{x} = t_6 = -\frac{(1-c')\cdot\delta'}{f(1-f')\left(c(1-\gamma)\frac{1}{t_3} + d\delta'\right)} \left(a t_1 + \frac{b}{M} \frac{1-d'}{a'} \frac{1-e'}{d'} t_2 \right) \frac{b}{t_2}.$$

Dann kann man auch t_5 und t_7 berechnen, man findet:

$$t_5 = \frac{t_2}{t_3} \cdot t_6, \quad t_7 = -\sqrt{\frac{a'd'}{a'\delta'}} \frac{t_2}{t_1} \cdot t_6.$$

Dieser Fall ist hiermit erledigt, und wir können das Resultat aussprechen:

Im Falle $e_{-1} \neq 0$, $f_{-1} = 0$, $g_{-1} = 0$ gibt es einen übergeschlossenen Mechanismus; für diesen gelten die Beziehungen:

$$1 - f' = \frac{1-c'}{a'}.$$

$$\frac{a'}{1-d'} = \frac{\alpha'}{1-\delta'}, \qquad \frac{1-c'}{d'} = \frac{1-\gamma'}{\delta'}.$$

$$\left(a^2 \frac{a'd'}{(1-c')(1-d')} + c^2 - d^2 \frac{d'}{1-c'}\right) M - b^2 = 0.$$

$$M = \frac{(1-c')(1-d')}{a'd'} - \frac{1-c'}{d'} + 1.$$

$$e^2 = Mc^2 a'(1-\delta', \quad f^2 = \frac{1}{M} b^2 a'(1-\delta'), \quad g^2 = Ma^2 d'\delta' \frac{a'}{1-d'}.$$

$$t_5 = \frac{t_2}{t_3} t_6, \quad t_6 = -\frac{a'(1-\delta')}{f\left(a\frac{a'}{t_1} + d(1-\delta')\right)} \left(c t_3 + \frac{b}{M} t_2\right) \frac{b}{t_2}.$$

$$t_7 = -\sqrt{\frac{a'd'}{a'\delta'}} \frac{t_2}{t_1} \cdot t_6.$$

Dieser Mechanismus ist von Bolduan in Fall A seiner Arbeit behandelt worden. Er steht in engem Zusammenhange mit den früher in dem Falle $e_{-1} \neq 0$, $f_{-1} = 0$, $g_{-1} = 0$ gefundenen Mechanismen. In Fig. 28 ist er angegeben.

§ 25.

Schlußbetrachtungen.

Überblicken wir die gesamte Untersuchung, so können wir als wichtigstes Resultat den Lehrsatz aufstellen:

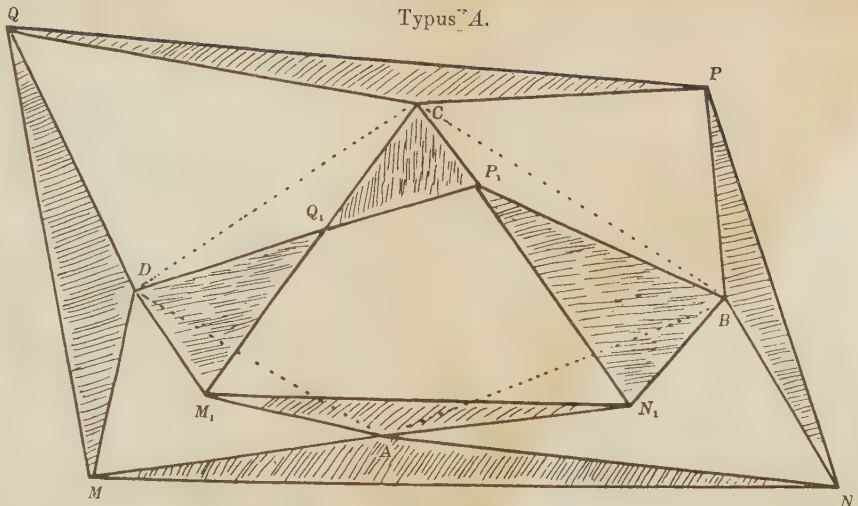
Lehrsatz: Bei sämtlichen betrachteten Gelenksystemen ist es möglich, die trigonometrischen Funktionen aller Winkel rational durch ellipt. Funktionen eines Parameters darzustellen.

Dieser Satz ist auf Grund der von Krause angegebenen Methode beinahe selbstverständlich. Ob dieser Satz noch weiter für andere übergeschlossene Mechanismen Geltung besitzt, wird eine erneute Aufnahme der Untersuchungen lehren. Daß es der Fall sein wird, erscheint nicht ausgeschlossen.

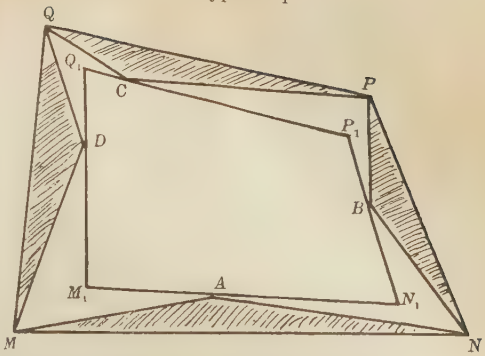
Für die Anregung zur vorliegenden Arbeit, wie auch für die mannigfache Unterstützung spreche ich meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Geheimrat Prof. Dr. Krause meinen herzlichsten Dank aus.

Herrn Prof. Dr. Staude, Kais. Russ. Staatsrat, bin ich für die gütige Übernahme des Referates zu Danke verpflichtet.

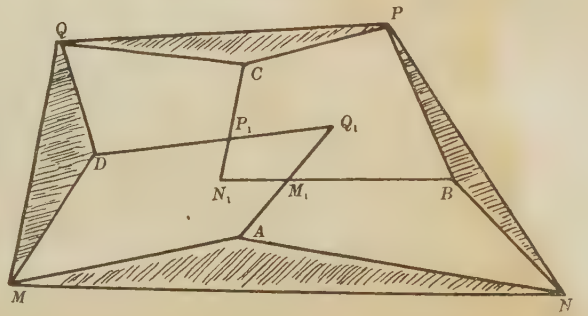
Typus A.



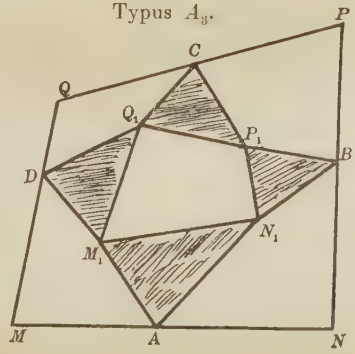
Typus A_1.



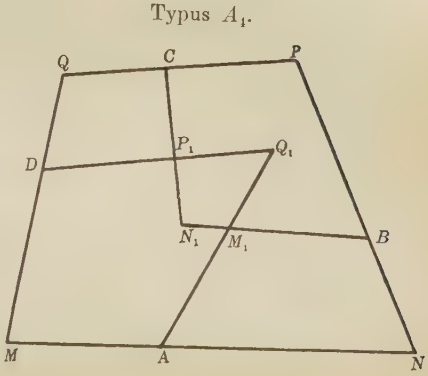
Typus A_2.



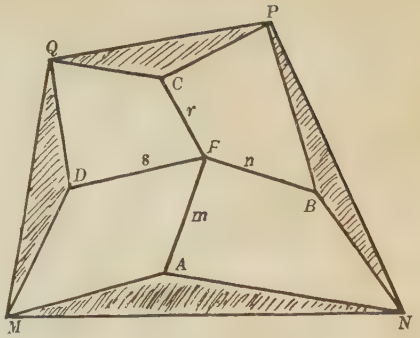
Typus A_3.



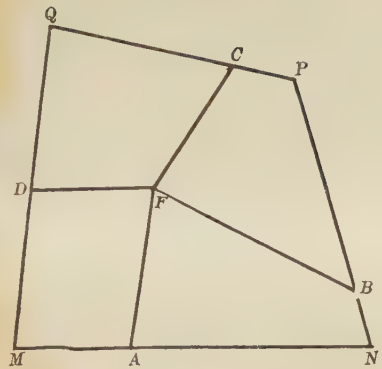
Typus A_4.



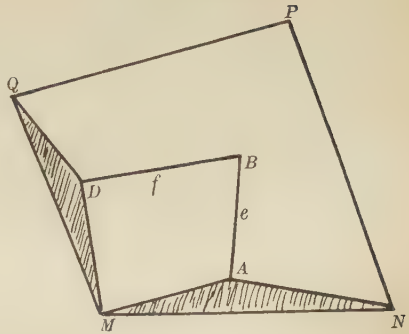
Typus A_5.



Typus A_6.



Typus B.



Typus C.

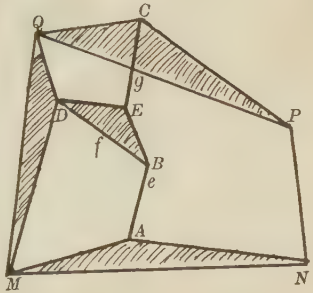


Fig. 1.

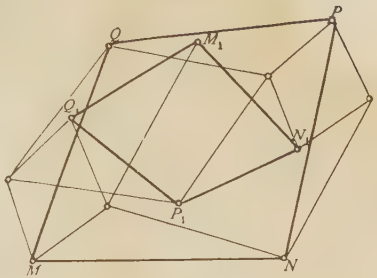


Fig. 2.

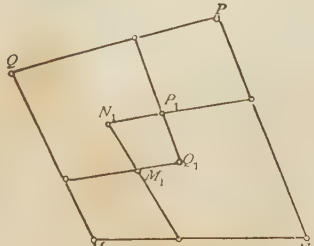


Fig. 3.

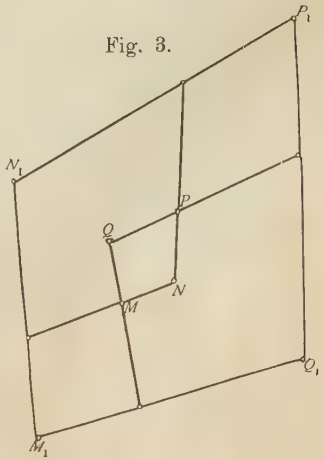


Fig. 4.

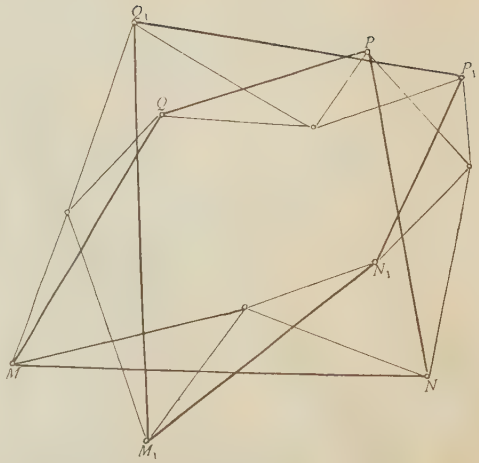


Fig. 5.

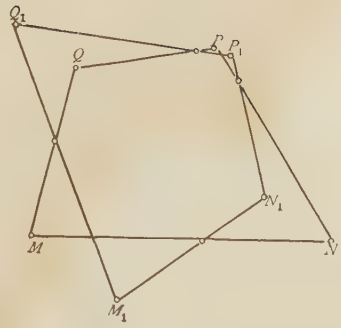


Fig. 6.

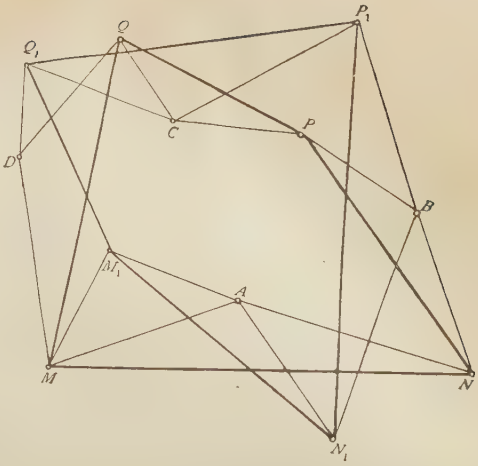


Fig. 7.

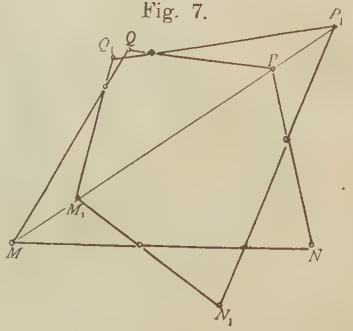


Fig. 8.

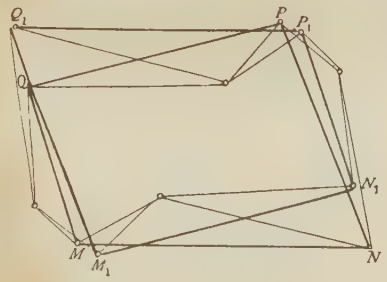


Fig. 9.

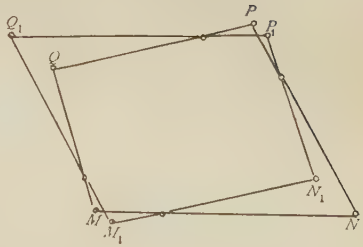


Fig. 10.

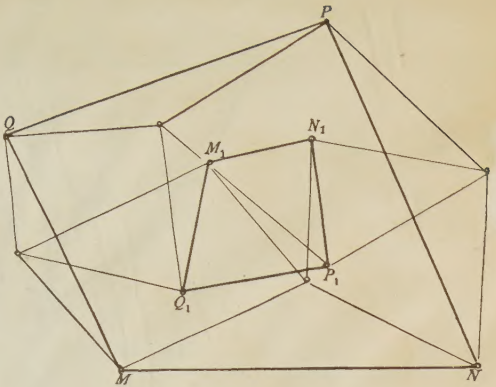


Fig. 11.

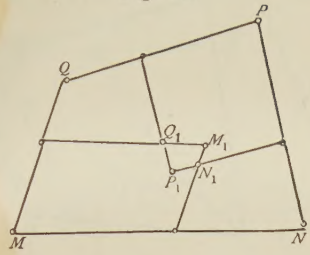


Fig. 12.

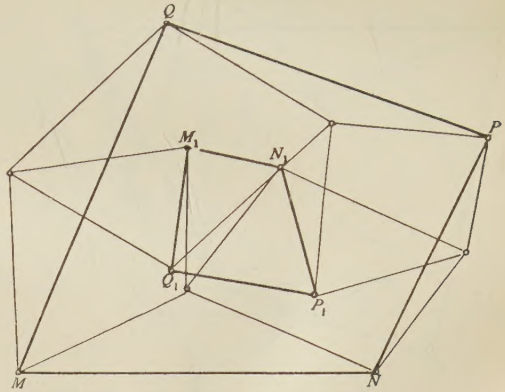


Fig. 13.

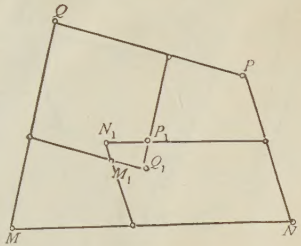


Fig. 14.

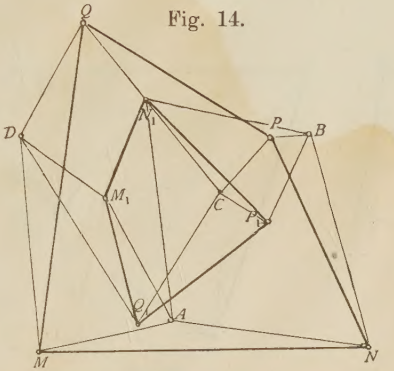


Fig. 15.

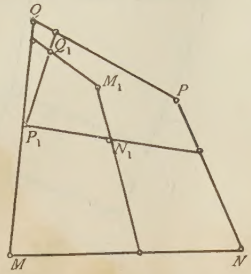


Fig. 16.

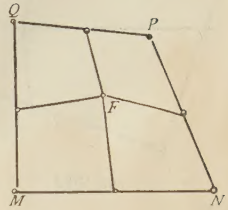


Fig. 17.

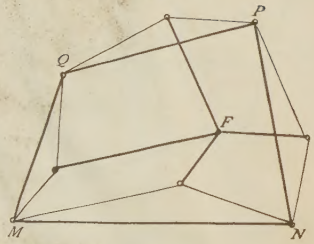


Fig. 18.

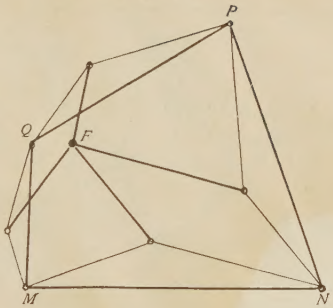


Fig. 19.

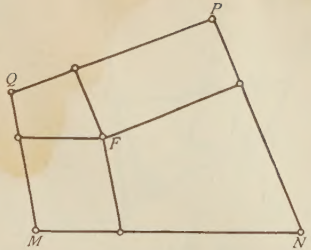


Fig. 20.

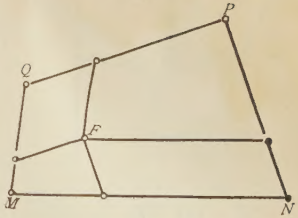


Fig. 21.

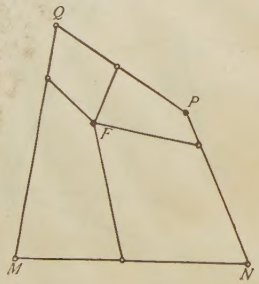


Fig. 22.

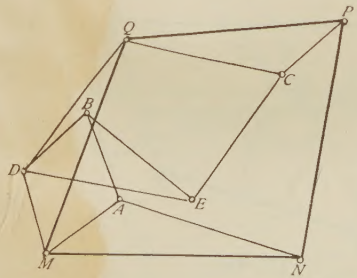


Fig. 23.

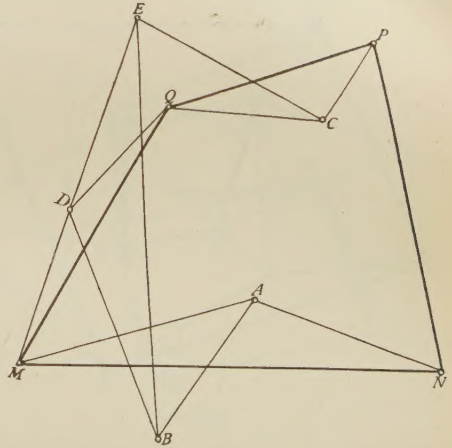


Fig. 24.

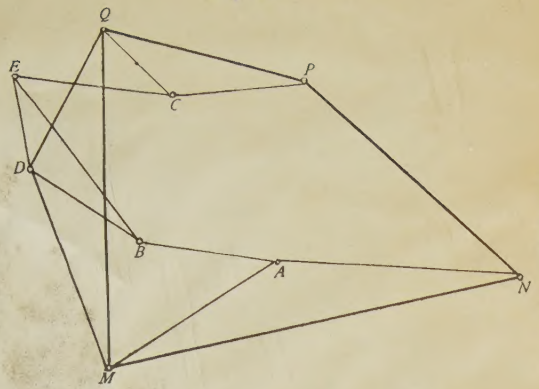


Fig. 25.

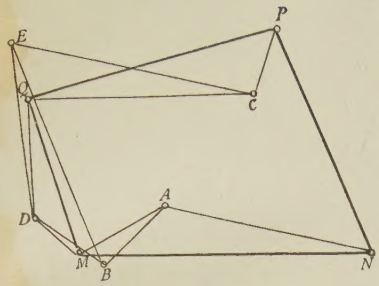


Fig. 26.

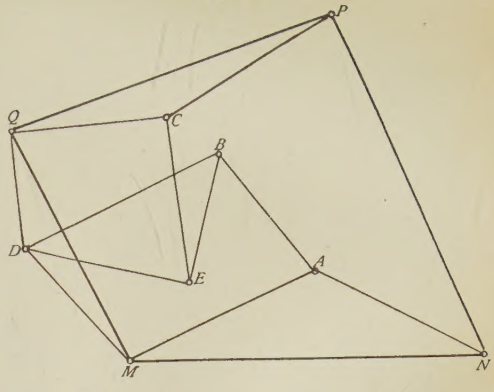


Fig. 27.

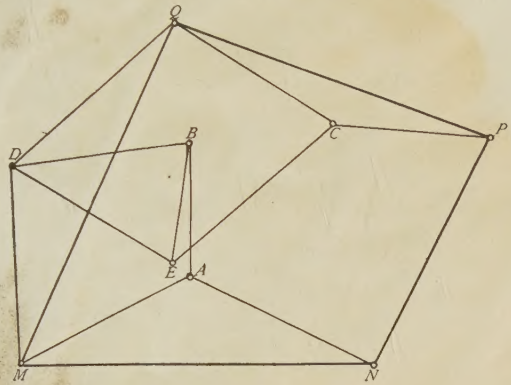
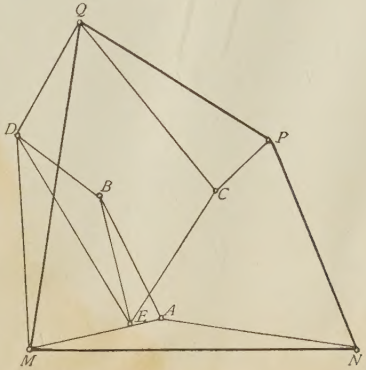


Fig. 28.



Lebenslauf.

Ich, Emil Kurt Bleicher, evang.-luth. Konfession, wurde am 20. November 1885 zu Dresden geboren. Nachdem ich vier Jahre die IV. Bürgerschule meiner Vaterstadt besucht hatte, kam ich auf das städt. Realgymnasium, Drei-König-Schule, Dresden-Neustadt. Ostern 1905 erhielt ich das Reifezeugnis.

Hierauf studierte ich Mathematik und Physik, und zwar von Ostern 1905 bis Ostern 1909 an der Kgl. Technischen Hochschule zu Dresden und dann im Sommersemester 1909 an der Universität Rostock. Im Dezember 1909 bestand ich in Dresden die Prüfung für Kandidaten des höheren Lehramtes und wurde dann Ostern 1910 an die Oberrealschule zu Leipzig zur Ableistung des Seminarhalbjahres gewiesen. Am 8. Juni 1910 bestand ich das Examen rigorosum.

Allen meinen verehrten Lehrern, besonders aber den Herren Geh. Hofrat Prof. Dr. Krause und Geh. Hofrat Prof. Dr. Helm spreche ich für meine Förderung meinen herzlichsten Dank aus.